Découverte des développements limités

1 Premiers pas

Le but de ce nouveau chapitre est d'essayer d'approcher des fonctions à l'aide de polynômes. Pour cette première séance on se préoccupera de l'approximation « autour de 0 » de quelques fonctions usuelles. On notera $\varepsilon(x)$ des fonctions telles que $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $]-1/2, 1/2[$ par $f(x) = 1/(1-x)$.

1. Rappeler la formule pour calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison x.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n \cdot \frac{x}{1-x}.$$

3. Que dire du comportement de la fonction $\frac{x}{1-x}$ en 0 ?

Définition 1. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n au voisinage de* 0 si il existe un polynôme $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (appelé *partie régulière* du développement limité) tel que :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x).$$

On peut démontrer que si f admet un développement limité, le polynôme de la définition (la partie régulière) est unique. Que dire alors du développement limité de la fonction de l'exercice 1 ?

Exercice 2. Soient f et g deux fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

1. Que dire de $f + g$?
2. Que dire de fg ?
3. Que dire de af, où $a \in \mathbb{R}$?
4. Peut-on déterminer un développement limité de f à l'ordre $k < n$ au voisinage de 0 ?

2 Résultat fondamental

Théorème (Formule de Taylor-Young)

Si f est n fois dérivable au voisinage de 0, alors :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

1. Calculer les dérivées successives de f.
2. Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.
3. En déduire le développement limité de la fonction sinus en 0 à l'ordre n.

Répéter les questions précédentes avec la fonction $g(x) = e^x$.

Exercice 4. Déterminer pour tout n les $f^{(n)}(0)$ où f est la fonction de l'exercice 1.

3 Développements limités usuels à connaître

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \qquad +x^n\varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \qquad +x^{2p+1}\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} \qquad +x^{2p}\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + +x^3 + \ldots + x^n \qquad +x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} \qquad +x^n\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + a(a-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots$$

$$+ a(a-1)\ldots(a-n+1)\frac{x^n}{n!} \qquad +x^n\varepsilon(x)$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{13}}{13!}-\frac{x^{15}}{15!}+\dots$$

4 Règle de calcul - applications

Soit u une fonction telle que $u(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$ et admettant un développement limité. Si f admet un développement limité en 0, alors, $f \circ u$ admet un développement limité en 0.

Exercice 5. Déterminer le développement limité de $\sin(2x^2)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

Exercice 6. En effectuant un développement limité, retrouver la valeur de la limite de $\sin(x)/x$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 7. Déterminer une valeur approchée de $\sin(1)$. Comparer avec ce que donne la calculatrice. Faire de même avec $e = e^1$.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$. On souhaite étudier le comportement de f « au voisinage de $+\infty$ ».

1. Soit $h = 1/x$. Écrire $f(x)$ en fonction de h.
2. Effectuer le développement limité de $f(h)$ à l'ordre 2 en 0.
3. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et déterminer son expression.

5 Illustration

Approximation de la fonction sinus par la partie régulière de son développement limité.