1 Division selon les puissances croissantes

On a vu en cours d'algèbre comment effectuer des *divisions de polynômes suivant les puissances croissantes*. Puisque les développements limités sont des approximations de fonctions par des polynômes, il est naturel d'appliquer cette méthode pour trouver des développements limités de rapport de deux fonctions.

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0. On notera :

$$f(x) = A(x) + x^n\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = B(x) + x^n\varepsilon_2(x),$$

où A et B sont deux polynômes de degré au plus n correspondant aux parties régulières des développements limités de f et de g. On suppose que le terme constant de B est non nul. On sait d'après le cours d'algèbre qu'il existe deux polynômes Q et R tels que $\deg(Q) \leqslant n$ et $A(x) = B(x)Q(x) + x^{n+1}R(x)$. En déduire que f/g admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

Exercice 2. Utiliser le résultat de l'exercice précédent pour déterminer le développement limité de la fonction tangente à l'ordre 5 au voisinage de 0.

2 Intégration d'un développement limité

Exercice 3. Soit f une fonction dérivable n fois en 0 et soit F une primitive de f. En utilisant la formule de Taylor-Young, démontrer que F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0. Quel lien y a-t-il entre les développements limités de f et de F ?

Exercice 4. Déterminer le développement limité en 0 de :

1. $x \mapsto \arctan(x)$, à l'ordre n ;
2. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, à l'ordre n ;
3. $x \mapsto \arccos(x)$, à l'ordre 5 ;

Exercice 5. En sa rappelant que $\tan' = 1 + \tan^2$, déduire du développement limité de tan à l'ordre 0 celui à l'ordre 1, puis répéter l'opération plusieurs fois.

3 Continuité et dérivabilité

On a vu qu'il était possible d'intégrer le développement limité d'une fonction pour trouver le développement limité d'une de ses primitives. On ne peut pas en général dériver un développement limité ! Cependant, voici ce que l'on peut dire...

Exercice 6. Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre 0 en 0. Démontrer que f est continue en 0 et déterminer $f(0)$ en fonction du développement limité de f. Que peut-on dire si f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 ? Et si elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 ?

Exercice 7. Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc}]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} \end{array}$$

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.
2. Quelle est alors la position relative de la courbe du prolongement de f par rapport à sa tangente en 0 ?

4 Développement limité au voisinage de $x_0 \neq 0$

On dira qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage du point x_0 si on peut écrire :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Tous les résultats vus sur les développements limités au voisinage de 0 sont encore vrais au voisinage d'un point quelconque (attention, pour la composition, on demandera à ce que la fonction par laquelle on compose admette x_0 pour limite au lieu de 0).

Pour effectuer le développement limité d'une fonction au voisinage d'un point quelconque, il suffit de « se ramener en 0 ». Voyons sur un exemple comment faire.

Exercice 8. On veut déterminer un développement limité de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ au voisinage de $\pi/3$. Si on pose $x = \pi/3 + h$, alors, dire que x est au voisinage de $\pi/3$ revient à dire que h est au voisinage de 0.

1. Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\cos(h)$ et de $\sin(h)$.
2. Effectuer le développement limité en h de l'expression trouvée à la question précédente.
3. En déduire le développement limité de cos au voisinage de $\pi/3$.

Exercice 9. Déterminer le développement limité de :

1. $x \mapsto \sin(x)$, à l'ordre 4 en $\pi/2$;
2. $x \mapsto \arctan(x)$, à l'ordre 3 en 1 ;
3. $x \mapsto \ln(x)$, à l'ordre 3 en 1 ;
4. $x \mapsto e^x$, à l'ordre 4 en 1.

Exercice 10. On peut écrire une formule de Taylor au voisinage de x_0 quelconque pour une fonction f n fois dérivable.

1. Écrire la formule de Taylor en 0 pour la fonction $g(x) = f(x_0 + x)$.
2. Déterminer $g^{(k)}(0)$ en fonction de $f^{(k)}(0)$.
3. En déduire une formule pour f en remplaçant x par $x - x_0$.

5 Quelques exercices et applications

Exercice 11. Donner le développement limité en 0 de :

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$, à l'ordre 4 ;
2. $x \mapsto \tan(x)$, à l'ordre 4 ;
3. $x \mapsto \sin(\tan(x))$, à l'ordre 4 ;
4. $x \mapsto (\ln(1 + x))^2$, à l'ordre 4 ;
5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$, à l'ordre 3 ;
6. $x \mapsto \sin^6(x)$, à l'ordre 9.

Exercice 12. Étudier la position de la courbe représentative de $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et en 1.

Exercice 13. Déterminer les développements limités en 0 de :

1. $\cos(x)\ln(1 + x)$, à l'ordre 4 ;
2. $\dfrac{1}{\cos x}$, à l'ordre 4.

Exercice 14. En utilisant la formule de Taylor, déterminer les développements limités des fonctions ch et sh à l'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. Donner le DL_2 en $+\infty$ de :

$$x \to \sqrt{\frac{x-2}{x+1}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)}.$$

Exercice 16. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Exercice 17. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$ 3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}$.

Exercice 18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Exercice 19. Étudier les branches infinies des fonctions :

1. $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1 + x^2}\right)$;
2. $g(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}$.

Exercice 20. Soient f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad g(x) = (x + 1) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Déterminer si leurs graphes respectifs ont des asymptotes puis la position de ces graphes par rapport à celles-ci.