S'exprimer en mathématiques

1 Pour s'entraîner

1 On définit les assertions suivantes :
- D : « Je dors. »
- P : « Je parle. »
- R : « Je rêve. »
- T : « Je tousse. »

Exprimer sous forme symbolique les affirmations ci-dessous.

1. Je dors et je rêve, mais je ne tousse pas.
2. Quand je dors, je ne parle pas.
3. Chaque fois que je dors, je parle mais je ne tousse pas.
4. Si je dors ou si je parle, alors je tousse.
5. Il suffit que je dorme pour que je rêve.
6. Une condition nécessaire pour que je dorme et que je parle est que je rêve.
7. Je dors et je parle si et seulement si je rêve ou je tousse.
8. Soit je dors et je rêve, soit si je tousse alors je ne parle pas.

2 Les phrases suivantes signifient-elles $A \Rightarrow B$ ou $B \Rightarrow A$?

1. Si A, alors B.
2. Pour que A, il faut que B.
3. Pour que A, il suffit que B.
4. A est une condition suffisante pour B.
5. A est une condition nécessaire pour B.
6. A dès que B.
7. A est faux si B l'est.
8. Sans A, on ne peut avoir B.

3 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f ne prend que des valeurs positives,
2. f est la fonction nulle,
3. f s'annule,
4. f s'annule une seule fois,
5. f s'annule sur $[0,1]$,
6. f s'annule sur $[0,1]$ et uniquement sur $[0,1]$,
7. f est majorée,
8. f est bornée,
9. f est paire,
10. f est périodique,
11. f est croissante sur $\mathbb{R}$,
12. f n'est pas la fonction nulle,
13. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts,
14. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

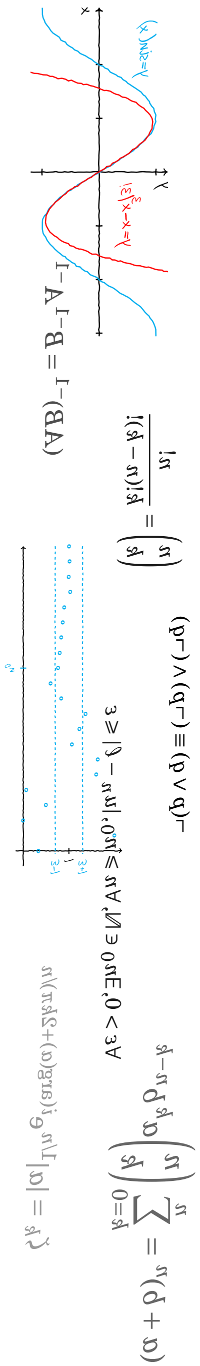
4 Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I à valeurs réelles. Exprimer verbalement les assertions suivantes :

1. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad f(x) = C$,
2. $\forall x \in I,\quad \big(f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\big)$,
3. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\quad \big(x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)\big)$,
4. $\forall x \in I,\quad f(x) \geqslant 0$.

5 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$;
2. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$;
3. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant M$;
4. $\forall x \in I,\ (f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0)$.

6 Pour chacune des assertions suivantes, donner sa négation et dire ensuite, en justifiant la réponse, si l'assertion est vraie ou fausse.
- P_1 : $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \leqslant 0$.
- P_2 : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$.
- P_3 : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
- P_4 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_n = 3 \times (-2)^n$, est décroissante.
- P_5 : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^\star, \big(n \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon\big)$.



7 On considère l'assertion (P) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(x^2 \geqslant 5 \Longrightarrow x \geqslant \sqrt{5}\right).$$

Écrire la négation de (P). (P) est-elle vraie ? Justifier la réponse.

8
1. Si P et Q sont deux assertions logiques, rappeler la négation et la contraposée de $P \Rightarrow Q$.
2. On se donne deux nombres réels a et b. On considère l'implication $(\star)$ suivante :

$$\left(\exists k \in \mathbb{Z},\, a = b + 2k\pi\right) \Rightarrow \sin(a) = \sin(b).$$

   (a) Cette implication $(\star)$ est-elle vraie ?
   (b) Écrire la contraposée de l'implication $(\star)$.
   (c) Écrire la négation de l'implication $(\star)$.
   (d) Écrire la réciproque de l'implication $(\star)$. Cette réciproque est-elle vraie ? Pourquoi ?

9 Soit n un entier naturel. Démontrer que $n^2 + 3n$ est pair.

10 Démontrer que la somme de deux entiers de même parité est un nombre pair.

11 Soit a un nombre réel vérifiant : $\forall \varepsilon > 0, \quad |a| < \varepsilon$. Montrer que $a = 0$.
Indication : utiliser la contraposée.

12 *« Si je dors, alors je rêve et je ne ronfle pas. Si je ne ronfle pas, alors je parle. Je ne parle pas. »* Que peut-on en déduire ?

☐ Je ronfle.	☐ Je ne rêve pas.
☐ Je ne ronfle pas.	☐ Je dors et je ronfle.
☐ Je ne dors pas.	☐ Je ne rêve pas et je ne dors pas.

13 On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que f garde un signe constant si, et seulement si, $a = 0$.

14 Soient $\mathscr{P} = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ et $\mathscr{I} = \{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$ les ensembles formés respectivement des entiers naturels pairs et des entiers naturels impairs. Démontrer que $\mathscr{P} \cap \mathscr{I} = \emptyset$.

15 On cherche à déterminer en raisonnant par analyse-synthèse toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

1. On suppose qu'une telle fonction f existe. Prouver que $f(0) = 1$.
2. En déduire l'expression de $f(x)$.
3. Conclure.

16 Déterminer en raisonnant par analyse-synthèse toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

17 Soit $a > 0$ un réel fixé. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

18 Soient q un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *géométrique de raison* q, c'est-à-dire une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n$. Démontrer alors que :

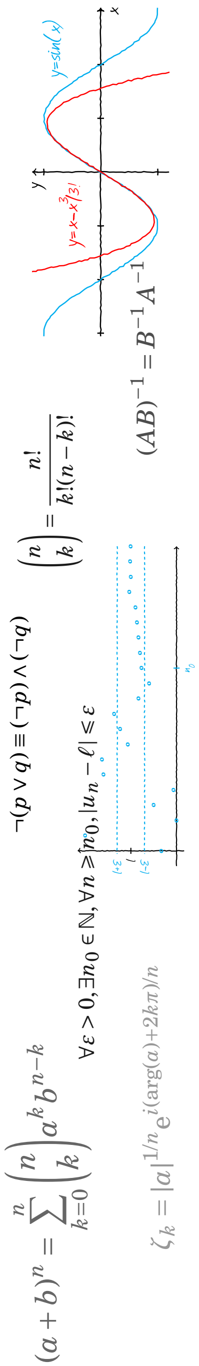
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n.$$

2 Pour approfondir

19
1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) + f(-x), \quad h(x) = f(x) - f(-x).$$

   Étudier la parité des fonctions g et h.
2. Démontrer, par analyse-synthèse, que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, s'écrit de manière unique, comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.



Calculer dans l'ensemble des nombres réels

1 Pour s'entraîner

20 Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\frac{x}{y}$ sachant que $x \in [3;6]$ et $y \in [-4;-2]$.

21 Déterminer un encadrement de $\dfrac{x+\ln x}{1+x^2}$ lorsque $x \in [1;3]$.

22 Soient a, b et c des nombres réels positifs. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$; en déduire que $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$;
2. si $a > 0$ alors $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$;
3. si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a(1-a) \leqslant \frac{1}{4}$;
4. si $a > 0$ et si $b > 0$ alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$;
5. si $a > 0$ et si $b > 0$ alors $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

23 Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

24 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = 1 + f(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2;2]$.

25 Déterminer les longueurs des côtés d'un triangle rectangle dont l'aire est de 60 cm^2 et le périmètre de 40 cm.

26 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1): 3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$;
$(E_2): x^6 = 8$;
$(E_3): |x-5| = 2\,|x+5|$;
$(E_4): |2x-1| + |x+4| = 7$;
$(E_5): x + |x-1| = 1 + |x|$;
$(E_6): 2x^2 + |x-1| = |x+1|$.

27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\frac{x}{x-4} \geqslant \frac{1}{x+5}$;
2. $x^3 + 5x \leqslant 6x^2$;
3. $|x-2| + |x-1| < 3$;
4. $\left|1-2x^2\right| \geqslant 3$;
5. $x^2 + |x-1| - |2x+1| < 0$;
6. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant |x-2|$;
7. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant x-2$;
8. $\sqrt{1-x^2} \leqslant m - x$ où m est un paramètre réel.

28 Résoudre dans $[0;2\pi[$ les inéquations trigonométriques :

$$\cos x \geqslant 0, \quad 1 + 2\sin x \geqslant 0, \quad 2\cos x \geqslant \sqrt{3},$$

$$\sin^2 x > 1, \quad 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0.$$

29 En remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \tan\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

En déduire les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

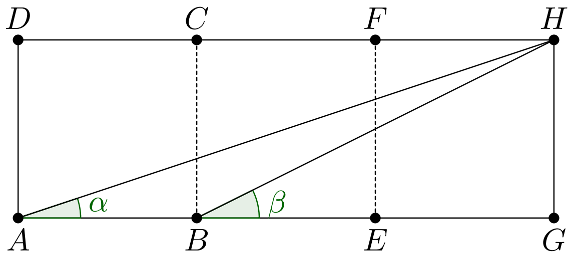
30 Soit $x \in [0,\pi]$. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leqslant n\sin(x).$$

31 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, et placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions.

1. $\sin x = \frac{1}{2}$;
2. $\sin(2x) = \cos x$;
3. $\tan x = -\sqrt{3}$;
4. $2\sin^2 x = 1$;
5. $4\sin x \cos x = 1$;
6. $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sqrt{2}$;
7. $1 + \sin x - 2\sin^2 x = 0$;
8. $\sin^2 x + 3\cos x + \frac{3}{4} = 0$;
9. $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$;
10. $3\tan^2 x = 1$;
11. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$.

32 On considère 3 carrés disposés comme l'indique la figure ci-dessous. Que vaut la somme des angles α et β ?



Indication : calculer $\cos\alpha$*,* $\sin\alpha$*,* $\cos\beta$ *et* $\sin\beta$ *en fonction des données, puis en déduire* $\cos(\alpha+\beta)$ *et* $\sin(\alpha+\beta)$*.*

33 Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$A_n = 2^5+3^5+4^5+\cdots+n^5,$$
$$B_n = 2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times(2n),$$
$$C_n(x) = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n,$$
$$D = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{3^{101}}\right).$$

34 Soit n un entier naturel non nul. Expliciter les expressions suivantes sans utiliser les symboles $\sum$ et $\prod$:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{2k}$;
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{2^i}{3^{2i-1}}$;
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{3}{5^k}\right)$;
5. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\sqrt{3^k}$;
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}|k-n|$;
7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$;
8. $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}x^j$ où $x\in\mathbb{R}$;
9. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, où $n\geqslant 2$.

35 1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$.

2. En déduire, pour $n\geqslant 2$, une simplification de la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}i(i+1)$.

36 Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Que peut-on dire de $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ et de $\dfrac{1}{k(k+1)}$ lorsque k est un entier naturel non nul ? Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

37 Soit n un entier naturel non nul.

1. Pour k entier, développer la différence : $(k+1)^3-k^3$.
2. En déduire (sans raisonner par récurrence) la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$.
3. Calculer : $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n\times(n+1)$.

38 Démontrer par deux méthodes différentes que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad \sum_{k=1}^{n}k!\,k=(n+1)!-1.$$

Indication : pour une des deux méthodes, utiliser une démarche analogue à celle des exercices 36 et 37.

39 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes avec la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},\qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k},\qquad \sum_{j=1}^{2n}3^j\binom{2n}{j}.$$

40 On considère le nombre réel $a=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

1. Démontrer que a est solution de l'équation $x^3+3x-14=0$.
2. En déduire que $a=2$.

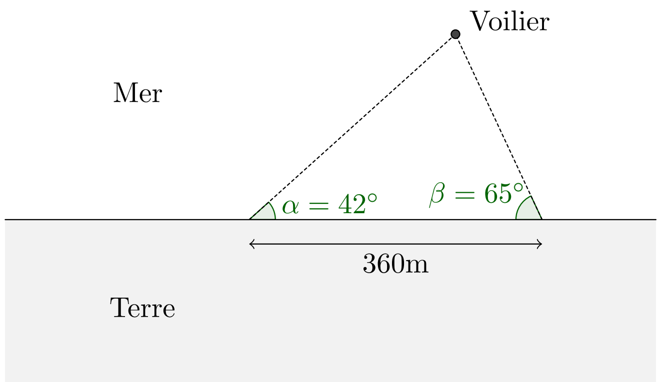
2 Pour approfondir

41 Montrer que, pour tous réels x et y :

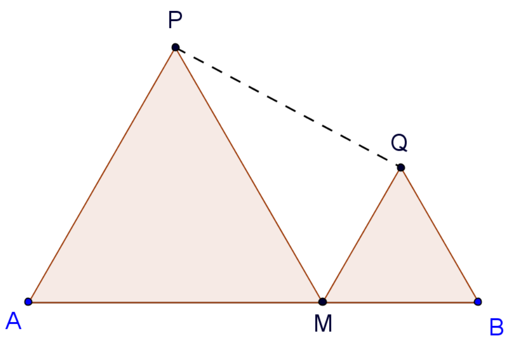
(i) $|x|+|y| \leqslant |x+y|+|x-y|$; (ii) $\sqrt{|x-y|} \geqslant \left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right|$.

Indication : (i) vérifier et utiliser le fait que $x = \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$ *et* $y = \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$, *(ii) montrer que* $\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y|} \geqslant \sqrt{|x|}$ *et* $\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|x|} \geqslant \sqrt{|y|}$.

42 D'après le schéma ci-dessous, à quelle distance de la côte (supposée rectiligne) se trouve le voilier ?



43 À tout point mobile M du segment $[AB]$, on associe les triangles équilatéraux directs AMP et BQM. Déterminer la position du point M pour que l'aire du quadrilatère $ABQP$ soit minimale (voir la figure ci-dessous).



44 Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ par la formule du binôme de Newton, simplifier P_n et S_n.

45 Démontrer que :

$$\forall x>0,\ \forall y>0, \quad x+y < \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 < \left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^3.$$

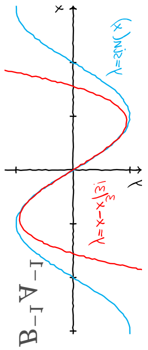
Indication : démontrer chaque inégalité séparément en étudiant le signe de la différence.

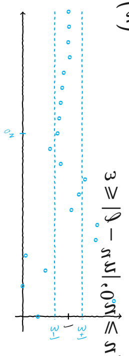
46 L'objectif de cet exercice est d'établir une formule sommatoire pour la somme $\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$, où n désigne un entier naturel non nul et x un nombre réel différent de 1.

1. Développer puis simplifier l'expression $(1-x)\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$. En déduire $\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$.
2. Soit n un entier naturel non nul fixé. On pose pour tout réel $x \neq 1$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

   (a) Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   (b) Calculer de deux façons différentes $f_n'(x)$.
   (c) Expliciter $\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$.
3. *Application* : déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.





Ensembles et applications

1 Pour s'entraîner

47 Soient E un ensemble non vide et a un élément de E. Décrire l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a\}))$.

48 On considère l'ensemble $E = \{a; b; c\}$. Peut-on écrire

1. $a \subset E$?
2. $a \in E$?
3. $\{a\} \subset E$?
4. $\{a\} \in \mathscr{P}(E)$?
5. $\emptyset \subset E$?
6. $\emptyset \in E$?
7. $\{\emptyset\} \subset E$?
8. $\{\emptyset\} \subset \mathscr{P}(E)$?
9. $\{a\} \in E$?

49 Étant données A, B et C trois parties d'un ensemble E, démontrer les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$,
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$,
3. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$,
4. $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

50 Soient E un ensemble et f une application de $\mathscr{P}(E)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour toutes parties X et Y disjointes de E,

$$(\star) \quad f(X \cup Y) = f(X) + f(Y).$$

1. Montrer que $f(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, alors $f(B \setminus A) = f(B) - f(A)$.
   Indication : exprimer B comme la réunion de deux parties disjointes de E (faire un dessin !).
3. Soient A et B deux parties quelconques de E. En écrivant $A \cup B$ comme la réunion de deux parties disjointes de E (*faire un dessin pour s'aider dans le cas où $A \cap B \neq \emptyset$*), déduire de l'égalité $(\star)$ et de la question précédente que :

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B).$$

51 Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $g^{-1}([-1;4])$.

52 Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Démontrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Démontrer que pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

53 Soient $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0 \text{ et } y > 0\}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$.

1. Calculer $f(0,1)$ et $f(1,0)$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer $f^{-1}(A)$.
3. A-t-on $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$?

54 On considère deux applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f(n) = 2n, \quad g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. f est-elle bijective ?
2. g est-elle bijective ?
3. Déterminer $(g \circ f)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Démontrer que $f \circ g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ puis calculer $(f \circ g)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

55 Les applications suivantes sont-elles bijectives ? Justifier.

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
- $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
- $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
- $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$

56 Démontrer que l'application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,}\\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon,}\end{cases}$$

est bijective.

57 Dire si les applications suivantes sont bijectives. Le cas échéant, déterminer la bijection réciproque.

$$f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (2x-y,x+y)\end{array},\qquad g\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \to & \mathbb{C},\\ z & \mapsto & \sqrt{2}\bar{z}+iz\end{array},$$

$$\varphi\ :\ \begin{array}{ccc}\mathscr{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{N})\\ X & \mapsto & \{1;2;3\}\cup X\end{array}.$$

58 On considère les quatre parties de $\mathbb{N}$ suivantes :

$$A=\{n\in\mathbb{N},\ \exists k\in\mathbb{N},\ n=3k\},\qquad B=\{n\in\mathbb{N},\ \exists k\in\mathbb{N},\ n=12k\},$$
$$C=\{n\in\mathbb{N},\ \exists k\in\mathbb{N},\ n=15k\},\qquad D=\{n\in\mathbb{N},\ n\leqslant 100\}.$$

1. Définir chaque ensemble précédent à l'aide d'une phrase en français.
2. Donner la liste des éléments de $B\cap D$.
3. Déterminer $A\cup B\cup C$.
4. Déterminer $A\cap B\cap C$ et donner la liste des éléments de $D\cap B\cap C$.

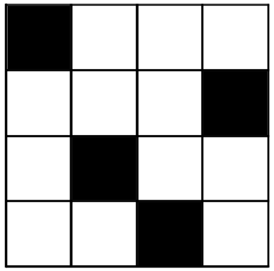
59 Un sondage effectué auprès de 150 personnes a donné les résultats suivants :

- à la question «mangez-vous 5 fruits et légumes par jour ?», 50 personnes répondent oui ;
- à la question «êtes-vous sportif ?», 80 personnes répondent oui ;
- à la question «êtes-vous un sportif qui mange 5 fruits et légumes par jour ?», 35 personnes répondent oui.

Combien de personnes ne sont pas sportives et ne mangent pas 5 fruits et légumes par jour ?

60 *Dénombrements élémentaires.*

1. Combien y a-t-il de nombres entiers naturels de 4 chiffres où le chiffre 9 figure une fois et une seule ?
   Indication : on pourra dénombrer ceux qui commencent par 9 puis ceux qui commencent par un des entiers de 1 *à* 8.
2. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un «paquet». Combien de «paquets» contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?
3. Un damier carré comporte 16 cases. On dispose de 4 jetons identiques que l'on place chacun sur une case du damier.
   (a) De combien de manières différentes peut-on placer les 4 jetons sur les 16 cases ?
   (b) De combien de manières peut-on placer les 4 jetons sachant qu'il doit y avoir un jeton et un seul sur chaque ligne et chaque colonne ?



61 Soient n et p deux entiers naturels tels que $1\leqslant p\leqslant n$. On pose $E=\{1,2,3,\dots,p\}$ et $F=\{1,2,3,\dots,n\}$.

1. Quel est le nombre de sous-ensembles de E ?
2. Quel est le nombre d'applications de E dans F ?
3. Quel est le nombre de bijections de E sur E ?
4. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de E dans F ?
   Indication : pour construire une application strictement croissante f de E dans F on commence par choisir p éléments distincts de F qui seront les images par f des p éléments de E.

2 Pour approfondir

62 *QCM.* Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, $A\cup(A\cap B)=\dots$

   (a) A (b) B (c) $A\cap B$ (d) $A\cup B$.

2. On pose $I=\{x\in\mathbb{R}/x^2<4\}$. Alors $I\cap\mathbb{Z}=\dots$

   (a) $\{-1;1\}$ (b) $\{0;1;2\}$ (c) $\{0;-1;1\}$ (d) $]-2;2[$.

3. Le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a,b\}))$ est égal à …

   (a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16.

4. On lance 3 fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note les triplets ainsi obtenus. Combien y a-t-il de triplets différents ?

   (a) $3!$ (b) 3^6 (c) 6^3 (d) A_6^3.

5. Quel est le coefficient de x^{87} dans l'écriture développée du polynôme $(1-x)^{100}$?

   (a) 87^{100} (b) $\binom{100}{87}$ (c) -87^{100} (d) $-\binom{100}{13}$.

6. Soit E un ensemble fini de cardinal n où $n\in\mathbb{N}^\star$. A et B sont deux parties de E, de cardinaux respectifs p et q tels que $1\leqslant p\leqslant q\leqslant n$. On suppose que $A\subset B$. Quel est le nombre de parties X de E telles que $A\subset X\subset B$?

   (a) 2^q (b) 2^q-2^p (c) 2^{q-p} (d) $\binom{q}{p}$.

63 Soit $f:E\to F$ une application. Soient A et B deux parties de E. Démontrer que :

1. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$,
2. $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

64 Soit E un ensemble fini de cardinal n ($n\in\mathbb{N}^\star$).

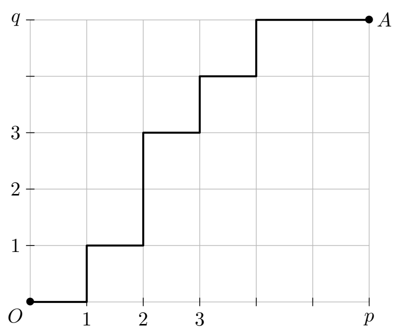
1. Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $B\subset A$.
   Indication : discuter suivant le nombre d'éléments de A, et déterminer le nombre de parties B possibles dans chaque cas.
2. Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $A\cap B=\emptyset$.
   Indication : discuter suivant le nombre d'éléments de A, et déterminer le nombre de parties B possibles dans chaque cas.
3. En déduire le nombre de triplets (A,B,C) de parties de E vérifiant $A\sqcup B\sqcup C=E$ (la notation de la réunion avec des symboles à angles droits $A\sqcup B\sqcup C$ signifie que les ensembles sont 2 à 2 disjoints).
   Indication : remarquer que lorsque A et B sont fixés et vérifient $A\cap B=\emptyset$, alors il existe un unique C tel que $A\sqcup B\sqcup C=E$: C est le complémentaire de $A\cup B$.

65 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O, on se donne le point A de coordonnées (p,q) où p et q sont deux entiers naturels non nuls. On trace les droites d'équations $x=i$ et $y=j$ pour tous entiers i et j tels que $0\leqslant i\leqslant p$ et $0\leqslant j\leqslant q$. On appelle «chemin $O-A$» tout chemin qui part du point O pour arriver au point A en suivant les lignes du quadrillage, et qui ne comporte que des déplacements vers la droite ou vers le haut. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des chemins $0-A$.

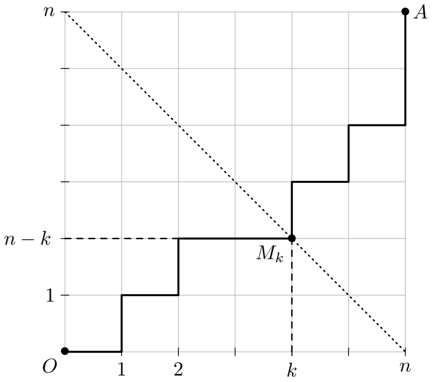
1. Justifier que Card($\mathscr{E}$) (le nombre de chemins $O-A$) est donné par :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{E})=\binom{p+q}{p}.$$

Indication : pour construire un chemin $O-A$ il faut effectuer p déplacements vers la droite et q vers le haut.



2. On suppose maintenant que $p = q = n$ et on cherche à calculer $\mathrm{Card}(\mathscr{E})$ par une autre méthode. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on note M_k le point de coordonnées $(k, n-k)$ et $\mathscr{E}_k$ l'ensemble des chemins $O - A$ passant par le point M_k.



   (a) En utilisant la question précédente, calculer le nombre de chemins $O - M_k$.

   (b) Calculer de la même manière le nombre de chemins $M_k - A$.

   (c) En déduire que $\mathrm{Card}(\mathscr{E}_k) = \binom{n}{k}^2$.

   (d) En déduire que $\mathrm{Card}(\mathscr{E}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

3. En utilisant les questions 1 et 2, simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Les nombres complexes

1 Pour s'entraîner

66 Écrire sous forme algébrique :

1. $(1+i)(1-2i)$,
2. $\dfrac{1-i}{3+2i}+2\dfrac{1+3i}{2-3i}$,
3. $(1+i\sqrt{3})^3$,
4. $\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4$.

67 Soient z et z' deux nombres complexes tels que $|z|=|z'|=1$ et $zz'\neq -1$. On pose $Z=\dfrac{z+z'}{1+zz'}$. Démontrer que Z est un nombre réel.

68 Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit B le point d'affixe $6-12i$.
On appelle f l'application du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z'=1-z^2.$$

1. Déterminer les antécédents de B par f.
2. Existe-t-il des points invariants par f ? Si oui, préciser leurs affixes.
3. (a) Montrer que deux points symétriques par rapport à O ont la même image par f.
   (b) Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses $(O;\vec{u})$?
4. Démontrer que l'image par f du cercle de centre O et de rayon 2 est un cercle que l'on déterminera.

69
1. Donner $f(\mathbb{R})$ où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est définie par $f(t)=e^{it}$.
2. On note $\mathbb{U}=\{e^{i\theta}\in\mathbb{C},\theta\in\mathbb{R}\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit l'application

$$g\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & z+\frac{1}{z}.\end{array}$$

Déterminer $g(\mathbb{U})$.

70 Simplifier, pour tout $\theta\in]-\pi,\pi[$, l'expression $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$.

71 Déterminer tous les nombres complexes z vérifiant :

1. $|z|=|z-1|=\left|\dfrac{1}{z}\right|$,
2. $\arg(z+1)\equiv\arg(z-i)\,[2\pi]$,
3. $|z+1|=|z|+1$,
4. $z+\overline{z}=|z|$.

72 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z, on note M, N et P les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1. les points M, N et P soient alignés ;
2. les points M, N et P forment un triangle équilatéral.

73 On pose $E=\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et on considère l'application

$$f\ :\ \begin{array}{ccc}E & \to & \mathbb{C}^\star\\ z & \mapsto & \frac{2}{(z-1)^2}.\end{array}$$

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8-6i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=\frac{1}{4-3i}$.
3. Démontrer que $f(E)=\mathbb{C}^\star$.
   On ne demande pas de calculer explicitement un antécédent de $\alpha\in\mathbb{C}^\star$ par f.
4. Soit θ un nombre réel tel que $0<\theta<2\pi$.
   (a) Démontrer que $e^{i\theta}-1=2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.
   (b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $f(e^{i\theta})$.
5. On considère l'ensemble $\Delta=\{z\in\mathbb{C},\ \Re e(z)=1\}$. Déterminer l'image directe de $\Delta\setminus\{1\}$ par l'application f.

74 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z :

1. $z^2+z+1=0$,
2. $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, où $\theta\in\mathbb{R}$,
3. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$,
4. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$,
5. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$,
6. $2z^4-(2+i)z^2+1-i=0$.

75 Soit θ un nombre réel tel que $0<\theta<\pi$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante :

$$z^2+\frac{1}{z^2}=2\cos\theta.$$

76 Déterminer les racines

1. carrées de $11+4i\sqrt{3}$,
2. cubiques de $8i$,
3. sixièmes de -27,
4. cubiques de $4(\sqrt{3}-i)$.

77 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=4\sqrt{2}(1+i)$ d'inconnue z.

78 Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose $z=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$.

1. Vérifier que pour tout réel θ, $\quad 1-\mathrm{e}^{i\theta}=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\theta/2}$.
2. Calculer la somme : $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

79 Soit n un entier naturel supérieur à 2.

1. Calculer la somme et le produit des n racines n-ièmes de l'unité.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

80 Soient $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$ et ω une racine n-ième de l'unité, $\omega\neq 1$. On pose :

$$S=\sum_{k=1}^{n}k\omega^{k-1}.$$

En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

81 Soit $\theta\in\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

82 Soit $x\in\mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin(x)\cos(x)$,
2. $\sin(2x)\cos(3x)$,
3. $\sin(2x)\cos^3 x$,
4. $\cos^2 x.\sin^2 x$,
5. $\cos^3 x+2\cos^2 x$,
6. $\sin^2(3x)+\cos^2(2x)$.

83 On définit l'application $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ par

$$\exp(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+i\sin y),\qquad \text{où } z=x+iy \text{ avec } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

1. Expliquer pourquoi la valeur 0 n'est pas prise par la fonction exp.
2. Pour $\alpha\in\mathbb{C}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $\exp(z)=\alpha$.
3. Déterminer $\exp(\mathbb{C})$.

84 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^z=1$,
2. $\mathrm{e}^z=2i$,
3. $\mathrm{e}^z=\sqrt{3}+3i$,
4. $\mathrm{e}^z-2\mathrm{e}^{-z}+2=0$,
5. $\mathrm{e}^{2z}=1+i\sqrt{3}$,
6. $\mathrm{e}^z=-1$,
7. $\left\{\begin{array}{rcl}\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{z'} & = & 2\\ \mathrm{e}^{z+z'} & = & 2\end{array}\right.$.

85

1. Montrer que
$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \overline{\mathrm{e}^z}=\mathrm{e}^{\overline{z}}.$$
2. A-t-on $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^{|z|}$? Si non, existe-t-il une inégalité générale entre ces deux nombres réels ?

2 Pour approfondir

86 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On pose :

$$\omega=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}.$$

1. Justifier que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$.
2. Calculer $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4$.
3. Vérifier que pour tout nombre complexe z non nul,
$$\frac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right)=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$.
5. (a) Déduire des questions précédentes la valeur exacte du réel $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

   (b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
6. On note K, A et B les points d'affixes respectives $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}i$ et ω. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre K passant par A.

   (a) Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.

   (b) Le cercle $\mathscr{C}$ coupe l'axe $(O;\vec{u})$ en deux points H et H' (H étant d'abscisse positive). Montrer que H a pour abscisse $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   Indication : utiliser la valeur trouvée à la question 5a.

   (c) En déduire une construction géométrique simple du point B.

   (d) Achever la construction du pentagone régulier de centre O dont B est un sommet.

87 On considère le nombre complexe

$$u = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

On pose encore $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$.

1. (a) Simplifier u^7.

   (b) Calculer la somme $1 + u + u^2 + \cdots + u^6$.

   (c) Calculer le produit $uu^2u^3 \ldots u^6$.
2. (a) Montrer que S et T sont deux nombres complexes conjugués.

   (b) Donner la valeur de $S + T$ et calculer $S \times T$.

   (c) Démontrer que la partie imaginaire de S est positive.

   (d) En déduire les valeurs exactes de S et T.
3. Calculer la somme :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

88 Soient a, b et c trois nombres complexes non nuls deux à deux distincts, tels que $|a| = |b| = |c|$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c. On souhaite démontrer que l'orthocentre (point d'intersection des hauteurs) du triangle ABC a pour affixe $a+b+c$.

1. Démontrer que si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes tels que $|z_1| = |z_2|$ et $z_1 \neq -z_2$, alors $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$ est un nombre imaginaire pur.
2. On note H le point d'affixe $a + b + c$.

   (a) Exprimer à l'aide de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$.

   (b) Que vaut l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}})$?

   (c) En déduire que la droite (AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A.
3. Démontrer que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

89 On considère l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

1. Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Démontrer que :

$$f(z) = f(z') \Longleftrightarrow \left(z = z' \text{ ou } zz' = 1\right).$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Discuter selon les valeurs de α le nombre de solutions de l'équation $f(z) = \alpha$.
3. Montrer que si z est un nombre complexe tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$ alors $f(z) \in \mathbb{R}$.