MTA

Algèbre et Analyse

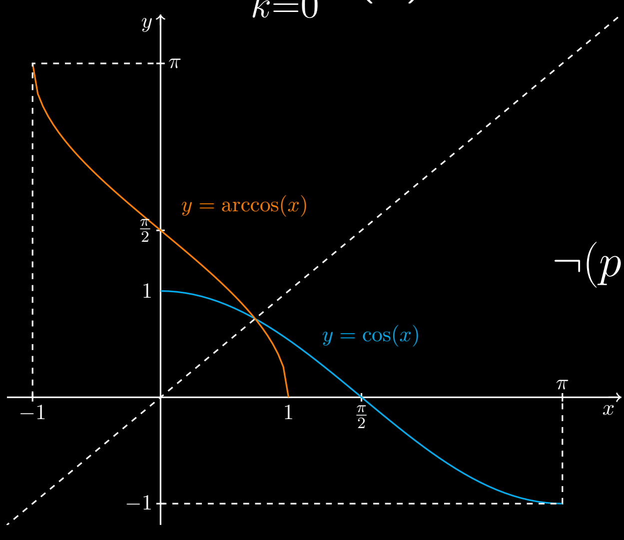
Alexis Flesch

Karine Mauffrey

Automne 2018

Version étudiant-e

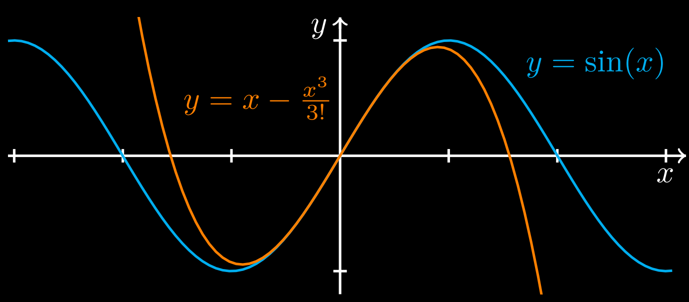
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$



$$\zeta_k = |a|^{1/n} \mathrm{e}^{i(\arg(a)+2k\pi)/n}$$

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Table des matières

Chapitre 1 — **S'exprimer en mathématiques** — **Page 6**

I Symboles ensemblistes — 6
Notions d'ensemble et d'élément – Inclusion d'ensembles – Produit cartésien – Notion d'application entre deux ensembles

II Rudiments de logique — 8
Assertions – Négation – Conjonction "et" et disjonction "ou" – Implication – Équivalence – Conditions nécessaires, conditions suffisantes – Quantificateurs

III Raisonnements — 12
Raisonnement direct ou par implication(s) – Disjonction de cas – Raisonnement par négation – Raisonnement par l'absurde – Raisonnement par contraposée – Raisonnement par analyse-synthèse – Démonstration par récurrence

Chapitre 2 — **Calculs dans l'ensemble des nombres réels** — **Page 17**

I Inégalités dans $\mathbb{R}$ — 17
Premières propriétés – Intervalles – Partie entière – Approximation décimale – Valeur absolue

II Trigonométrie — 19
Le cercle trigonométrique – Propriétés des fonctions circulaires – Représentations graphiques – Résolution d'équations trigonométriques

III Sommes et produits — 23
La notation $\sum$ (sigma) – Les notations $\prod$ (pi) et ! (factorielle)

IV Quelques identités remarquables — 25
Factorisation de $a^n - b^n$ – Coefficients binomiaux – Formule du binôme de Newton

Chapitre 3 — **Ensembles et applications** — **Page 27**

I Ensembles — 27
Rappels du chapitre 1 – Ensemble des parties – Réunion, intersection et complémentaire

II Applications — 30
Définitions – Restriction et composition – Image d'un ensemble par une application – Image réciproque d'un ensemble par une application – Applications bijectives

III Ensembles finis — 36

IV Dénombrement — 37
Arrangements – Combinaisons – Ensemble des parties

Chapitre 4 — **Les nombres complexes** — **Page 39**

I Premières définitions — 39
Représentation géométrique des nombres complexes – Conjugaison – Module d'un nombre complexe – Exponentielle imaginaire – Argument d'un nombre complexe non nul

II Résolution d'équations — 45
Racines carrées d'un nombre complexe – Équations du second degré à coefficients complexes – Racines n-ièmes

III Formules trigonométriques — 48
Linéarisation d'une expression – Développement d'un sinus ou d'un cosinus

IV Exponentielle d'un nombre complexe — 49

Chapitre 5 Suites numériques ____ Page 51

I Introduction 51
Premières définitions – Suites arithmétiques et géométriques

II Convergence d'une suite réelle 53
Limite finie – Limites infinies – Opérations sur les limites – Limites et relations d'ordre – Théorème des gendarmes – Suites adjacentes – Suites extraites

III Comparaison de suites 59
Définitions – Croissances comparées

IV Suites et fonctions 61

V Convergence d'une suite complexe 61

Chapitre 6 Limites et continuité ____ Page 63

I Limite d'une fonction 63

II Carctérisation séquentielle de la limite 67

III Opérations sur les limites 68

IV Comparaison locale de fonctions 70

V Fonctions continues 72

Chapitre 7 Les polynômes ____ Page 75

I L'ensemble des polynômes 75

II Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$ 77

III Polynôme dérivé 78

IV Racines d'un polynôme 79

V Factorisation de polynômes 80

Chapitre 8 Dérivabilité ____ Page 83

I Dérivabilité en un point 83

II Dérivabilité globale 85

III Théorèmes de Rolle et des accroissements finis 87

IV Variations des fonctions dérivables 89

V Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ 90

Chapitre 9 Fonctions trigonométriques réciproques ____ Page 92

I La fonction arc sinus 92

II La fonction arccos 93

III La fonction arc tangente 94

IV Quelques identités 95

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- traduire un énoncé à l'aide de quantificateurs,
- écrire la négation d'une assertion,
- distinguer les notions de condition nécessaire et condition suffisante,
- démontrer un résultat par disjonction de cas,
- démontrer un résultat par contraposée,
- démontrer un résultat par l'absurde,
- démontrer un résultat par analyse-synthèse,
- démontrer un résultat par récurrence.

I Symboles ensemblistes

I.1 Notions d'ensemble et d'élément

Définition 1.1. Un **ensemble** E est une collection d'objets appelés **éléments**. Si x est un élément de E, alors on note $x \in E$. Sinon, on note $x \notin E$.

Remarque 1.2. On peut se représenter un ensemble par un sac. Ce que contient le sac sont ses éléments.

Exemple 1.3. L'ensemble constitué des entiers 0 et 1 est noté $\{0; 1\}$.

Définition 1.4. Soient E et F deux ensembles. On dit qu'ils sont **égaux** et on note $E = F$ si ils contiennent les mêmes éléments.

Remarque 1.5. Il n'y a pas nécessairement de relation d'ordre dans un ensemble. Il n'y a pas non plus de répétition des éléments. Ainsi : $\{0; 1\} = \{1; 0\}$.

Définition 1.6. On appelle **ensemble vide** et on note $\varnothing$ l'ensemble ne contenant aucun élément (penser à un sac vide).

Remarque 1.7. L'ensemble $\{\varnothing\}$ n'est pas l'ensemble vide : c'est un ensemble constitué d'un seul élément, cet élément étant l'ensemble vide.

Définition 1.8. Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **intersection** de E et de F l'ensemble $E \cap F$ dont les éléments sont les éléments communs à E et à F.
- On appelle **réunion** de E et de F l'ensemble $E \cup F$ dont les éléments sont les éléments de E et les éléments de F.

Exemple 1.9. Soient E et F les ensembles définis par $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ et $F = \{0; 2; 4; 6\}$. Alors :

- $E \cap F = \{0; 2; 4\}$,
- $E \cup F = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Exemple 1.10. Notons $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs. On peut remarquer que :

- $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$,
- $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$.

I.2 Inclusion d'ensembles

Définition 1.11. Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F et on note $E \subset F$ si tous les éléments de E sont aussi des éléments de F.

Exemple 1.12. $\{1;2\} \subset \{1;2;3\}$.

Exemple 1.13. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

I.3 Produit cartésien

Définition 1.14. Soient E et F deux ensembles. À partir de $x \in E$ et de $y \in F$, on forme le **couple** (x, y) défini de sorte que : $(x, y) = (x', y')$ uniquement lorsque $x = x'$ et $y = y'$.

Attention. Ici, l'ordre des éléments est important. Par exemple :

$$(1, 2) \neq (2, 1).$$

Définition 1.15. On appelle **produit cartésien** de deux ensembles E et F l'ensemble formé des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$:

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Lorsque $E = F$, on note $E^2 = E \times E$.

Exemple 1.16. Si $E = \{1;2;3\}$ et que $F = \{a, b\}$ alors :

$$E \times F = \{(1, a); (1, b); (2, a); (2, b); (3, a); (3, b)\}.$$

Définition 1.17. Soient E_1, E_2, ..., E_n des ensembles (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).

- À partir de $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ..., et $x_n \in E_n$, on forme le n-**uplet** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ défini de sorte que : $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1', x_2', \dots, x_n')$ uniquement lorsque $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, ... et $x_n = x_n'$.
- On appelle **produit cartésien** des ensembles E_1, E_2, ..., E_n l'ensemble formé des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i \in E_i$. On le note $E_1 \times E_2 \times \dots E_n$:

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \big\{(x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\big\}.$$

- Lorsque $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$, on note $E^n = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.

I.4 Notion d'application entre deux ensembles

Définition 1.18. Une **application** (ou **fonction**) d'un ensemble E vers un ensemble F est une «transformation» qui à chaque élément x de E associe un et un seul élément y de F. Cet élément est noté $f(x)$ et est appelé **image** de x par f

Remarque 1.19. Une application est donc la donnée de 3 éléments : l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et les images des éléments de l'ensemble de départ. Les applications ci-dessous sont donc différentes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+, \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$

II Rudiments de logique

II.1 Assertions

Définition 1.20. Une **assertion** est un énoncé mathématique défini sans ambiguïté et pouvant être vrai (V) ou faux (F).

Exemples 1.21. Les énoncés suivants sont des assertions :
- $P_1 : 1 \leqslant 2$;
- $P_2 : 0 < 0$.
- P_3 : Le nombre 2^{13} est un entier positif.
- P_4 : Si x est un nombre réel négatif, alors sa valeur absolue est égale à x.

Exemple 1.22. La phrase «$f(x) = x^2$ est croissante» n'est pas une assertion car la fonction f est mal définie (suivant son espace de départ, cette phrase peut être vraie ou fausse).

Remarque 1.23. Il arrive qu'une assertion P dépende d'un paramètre x (ou de plusieurs paramètres $x, y, z, \ldots$), on la notera dans ce cas $P(x)$ (ou $P(x, y, z, \ldots)$) au lieu de P. On parle parfois de **prédicat**.

Exemples 1.24. Les énoncés suivants sont des prédicats :
- $P_1(x) : x \geqslant 0$;
- $P_2(a, b) : a + b = 0$.

Définition 1.25. Deux assertions P et Q ayant les mêmes valeurs de vérité sont dites **synonymes**. On note $P \equiv Q$ lorsque P et Q sont synonymes.

Exemple 1.26. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors les assertions suivantes sont synonymes :
- $P(n)$: « n est pair » ;
- $Q(n)$: « $n + 1$ est impair ».

II.2 Négation

Définition 1.27. La **négation** d'une assertion P est l'assertion prenant la valeur **Fausse** lorsque P est **Vraie** et inversement. On la note $\text{non}(P)$ (ou encore $\neg P$ ou $\overline{P}$).

Exemple 1.28. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $P(x) : x \geqslant 2$, alors $\text{non}(P(x)) : x < 2$.

Remarque 1.29. On peut aussi dire que l'assertion $\text{non}(P)$ est définie à l'aide de la **table de vérité** suivante :

P	$\text{non}(P)$
V	F
F	V

Proposition 1.30

Soit P une assertion, alors $\text{non}(\text{non}(P)) \equiv P$.

Démonstration. Écrivons la table de vérité correspondante.

P	$\text{non}(P)$	$\text{non}(\text{non}(P))$
V	F	V
F	V	F

□

II.3 Conjonction “et” et disjonction “ou”

Définition 1.31. Soient P et Q deux assertions. On appelle **conjonction** des assertions P et Q et on note $[P \text{ et } Q]$ (ou encore $P \wedge Q$) l'assertion qui est **Vraie** lorsque P et Q sont toutes les deux **Vraies** et **Fausse** sinon.

Remarque 1.32. La définition précédente est équivalente à la table de vérité suivante :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.33. Considérons les assertions :
- $P(x) : x \in \mathbb{Z}$;
- $Q(x) : x \geqslant 0$;
- $R(x) : x \in \mathbb{N}$.

Alors :
$$[P(x) \text{ et } Q(x)] \equiv R(x).$$

Définition 1.34. Soient P et Q deux assertions. On appelle **disjonction** de ces assertions et on note $[P \text{ ou } Q]$ (ou encore $P \vee Q$) l'assertion qui est **Fausse** lorsque P et Q sont toutes les deux **Fausses** et **Vraie** sinon.

Remarque 1.35. La définition précédente est équivalente à la table de vérité suivante :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque 1.36. Le «ou» mathématique est **inclusif**. L'assertion $[P \text{ ou } Q]$ est vraie si l'une au moins des assertions P ou Q est vraie.

Exemple 1.37. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons :
- $P(x) : x \geqslant -1$;
- $Q(x) : x \leqslant 0$.

Alors $\big[P(x) \text{ ou } Q(x)\big]$ est une assertion qui est vraie pour tout x.

Proposition 1.38 (Lois de Morgan)

Soient P et Q deux assertions. Alors :

$$\begin{aligned} \text{non}(P \text{ ou } Q) &\equiv (\text{non}(P)) \text{ et } (\text{non}(Q)), \\ \text{non}(P \text{ et } Q) &\equiv (\text{non}(P)) \text{ ou } (\text{non}(Q)). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous démontrerons le premier résultat en classe. Le deuxième est laissé à titre d'exercice. □

Proposition 1.39 (Distributivité)

Soient P, Q et R trois assertions. Alors :

$$P \text{ et } [Q \text{ ou } R] \equiv [P \text{ et } Q] \text{ ou } [P \text{ et } R]$$
$$P \text{ ou } [Q \text{ et } R] \equiv [P \text{ ou } Q] \text{ et } [P \text{ ou } R].$$

Démonstration. La première identité sera faite en classe, la deuxième est laissée à titre d'exercice. □

II.4 Implication

Définition 1.40. Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \implies Q$ comme étant :

- **Vraie** lorsque P est **Fausse** ou P et Q sont toutes les deux **Vraies**,
- **Fausse** sinon.

L'assertion $P \implies Q$ se lit «P **implique** Q». On parle aussi de l'**implication** $P \implies Q$. On dit que $Q \implies P$ est l'**implication réciproque** (ou tout simplement **la réciproque**) de $P \implies Q$.

Remarque 1.41. La définition précédente est équivalente à la table de vérité suivante :

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposition 1.42

Soient P et Q deux assertions. Alors :

- $(P \implies Q) \equiv [\text{non}(P) \text{ ou } Q]$,
- $\text{non}(P \implies Q) \equiv \big[P \text{ et } \text{non}(Q)\big]$.

Démonstration. Le résultat découle de la table de vérité suivante :

P	Q	$P \implies Q$	$\text{non}(P \implies Q)$	$\text{non}(Q)$	P et $\text{non}(Q)$
V	V	V	**F**	F	**F**
V	F	F	**V**	V	**V**
F	V	V	**F**	F	**F**
F	F	V	**F**	V	**F**

□

Exemple 1.43. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons :

- $P(x) : x \geqslant 2$;
- $Q(x) : x^2 \geqslant 4$.

Alors, $P(x) \implies Q(x)$ est vraie. Cependant, la réciproque est fausse. En effet, pour $x = -2$:

$$x^2 \geqslant 4 \quad \text{et} \quad x < 2,$$

donc $[Q(x) \text{ et } \text{non}(P(x))]$ est vraie (i.e. $\text{non}\,(Q(x) \implies P(x))$ est vraie). En revanche, si on définit l'assertion $R(x) : x \leqslant -2$, alors les deux implications ci-dessous sont vraies :

$$[P(x) \text{ ou } R(x)] \implies Q(x) \quad \text{et} \quad Q(x) \implies [P(x) \text{ ou } R(x)]\,.$$

II.5 Équivalence

Définition 1.44. Soient P et Q deux assertions. On note $P \iff Q$ l'assertion

$$\big[(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)\big],$$

et on lit «P et Q sont **équivalentes**».

1 En s'inspirant de la démonstration précédente, écrire la table de vérité de $P \iff Q$.

Exemple 1.45. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x^2 = 4 \iff x \in \{-2; 2\}.$$

II.6 Conditions nécessaires, conditions suffisantes

Définition 1.46.

- On dit que Q est une **condition nécessaire pour** P lorsque l'implication $P \implies Q$ est vraie, autrement dit lorsque le fait que P soit vraie entraîne nécessairement le fait que Q soit vraie aussi. On dit aussi « Pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie. »
- On dit que Q est une **condition suffisante pour** P lorsque l'implication $Q \implies P$ est vraie autrement dit lorsqu'il suffit que Q soit vraie pour que P le soit aussi.
- On dit que Q est une **condition nécessaire et suffisante pour** P lorsque l'équivalence $Q \iff P$ est vraie autrement dit lorsque P est vraie si et seulement si Q est vraie. On dit aussi « Pour que P soit vraie, il faut et il suffit que Q soit vraie. »

2 Soit x un nombre réel. La propriété $x \geqslant 1$ est-elle une condition nécessaire pour la propriété $x^2 + x - 1 \geqslant 0$? Une condition suffisante ?

II.7 Quantificateurs

Définition 1.47. Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On définit l'assertion :

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

comme étant **Vraie** lorsque $P(x)$ est **Vraie** pour tous les éléments x de E. On lit « **quel que soit** x **appartenant à** E**,** $P(x)$ ».

3 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) \leqslant 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 1$.

Définition 1.48. Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On définit l'assertion :

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

comme étant **Vraie** lorsqu'il existe (au moins) un élément x de E pour lequel $P(x)$ est **Vraie**. On lit « **il existe** x **appartenant à** E **tel que** $P(x)$ ».

4 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$;
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1$;
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 1$.

Définition 1.49. Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On définit l'assertion :

$$\exists! x \in E,\ P(x)$$

comme étant **Vraie** lorsqu'il existe exactement un élément x de E pour lequel $P(x)$ est **Vraie**. On lit « **il existe un unique** x **appartenant à** E **tel que** $P(x)$».

5 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$;
- $\exists! x \in \mathbb{C},\ x^2 = -1$;
- $\exists! x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = 1$.

Remarque 1.50. On peut construire des phrases mathématiques plus compliquées mélangeant les différents types de quantificateurs. Attention à ne pas les inverser ! Par exemple, l'assertion suivante est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x \leqslant n.$$

Cependant, l'assertion suivante est fausse :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x \leqslant n.$$

Proposition 1.51

$$\text{non}(\forall x \in E,\ P(x)) \equiv \exists x \in E,\ \text{non}(P(x)),$$
$$\text{non}(\exists x \in E,\ P(x)) \equiv \forall x \in E,\ \text{non}(P(x)).$$

Exemple 1.52. Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **positive** si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.$$

Ainsi, f n'est pas positive ssi (si et seulement si) :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0.$$

6 Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **croissante** si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)\big).$$

Écrire la négation de l'assertion précédente.

7 Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite **majorée** si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$$

Écrire la négation de cette assertion.

III Raisonnements

III.1 Raisonnement direct ou par implication(s)

Méthode (Démonstration directe par implication $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$). Pour démontrer qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie, on peut démontrer qu'elle découle de résultats déjà connus. Autrement dit, on part d'une assertion $\mathscr{Q}$ vraie et on démontre que l'implication $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$ est vraie (en effectuant éventuellement une chaîne d'implications). La démonstration dut fait que l'implication $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$ est vraie commence en général par « Supposons que $\mathscr{Q}$ est vraie » et se termine par « Donc $\mathscr{P}$ est vraie. »

Définition 1.53. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $n! = n \times (n-1) \times \ldots 1$. On note encore $0! = 1$.

Définition 1.54. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. On pose :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ce nombre est appelé **coefficient binomial** et se lit «k parmi n». Par convention, ce coefficient est égal à zéro lorsque $k > n$.

Proposition 1.55

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. Alors :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Démonstration. Vue en cours. □

Exemple 1.56. Démontrons que : $0 \leqslant x \leqslant 2 \implies \sqrt{x^2+5} \leqslant 3$. On a :

$$0 \leqslant x \leqslant 2 \implies 0 \leqslant x^2 \leqslant 4 \implies 0 \leqslant x^2+5 \leqslant 9 \implies 0 \leqslant \sqrt{x^2+5} \leqslant 3.$$

8 On rappelle que $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^\star\right\}$. Démontrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et que $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, alors $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Méthode (Démonstration d'une assertion $(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x))$). Démontrer une propriété du type $(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x))$, consiste à se donner un élément quelconque x appartenant à l'ensemble E et à démontrer que l'assertion $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour cet élément x. La démonstration commence toujours par « Soit $x \in E$ » ou « Soit x un élément de E » et se termine par « Donc $\mathscr{P}(x)$ est vraie. »

Exemple 1.57. Démontrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2(x) \leqslant 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Donc :

$$1 - \sin^2(x) = \cos^2(x) \geqslant 0.$$

D'où :

$$\sin^2(x) \leqslant 1.$$

III.2 Disjonction de cas

Pour démontrer la véracité d'une assertion $\mathscr{P}$, on peut partir d'une assertion $\mathscr{Q}$ et démontrer que les deux implications $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$ et $\text{non}(\mathscr{Q}) \implies \mathscr{P}$ sont vraies.

Exemple 1.58. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que :

$$\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

Si n est pair, alors on peut écrire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = 2k^2 + k \in \mathbb{N}.$$

Sinon, n est impair et s'écrit sous la forme $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = 2k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}.$$

On a donc bien démontré que la propriété est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

9 Démontrer qu'il existe un nombre irrationnel x tel que $x^{\sqrt{2}}$ soit rationnel. On pourra poser $y = \sqrt{2}$ et considérer $y^{\sqrt{2}}$ (très très difficile).

III.3 Raisonnement par négation

Méthode. Pour démontrer qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie, on peut démontrer que non($\mathscr{P}$) est fausse et vice versa.

Exemple 1.59. Démontrons qu'il n'existe pas d'entier plus grand que tous les autres. Notons $\mathscr{P}$ l'assertion :

$$\mathscr{P} \ : \ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant M.$$

Alors :

$$\text{non}(\mathscr{P}) \ : \ \forall M \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n > M.$$

Soit alors $M \in \mathbb{N}$. Posons $n = M+1$. Alors, n est un entier strictement plus grand que M, ce qui démontre que non($\mathscr{P}$) est vraie.

III.4 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde se base sur le fait que l'assertion

$$\left[\Big(\text{non}(\mathscr{P}) \implies \mathscr{Q}\Big) \text{ et non}(\mathscr{Q})\right] \implies \mathscr{P}$$

est toujours vraie.

Méthode. Démontrer par l'absurde qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie consiste à supposer que $\mathscr{P}$ est fausse et à en déduire une absurdité. Ce raisonnement permet alors de conclure que $\mathscr{P}$ est nécessairement vraie.

10 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

III.5 Raisonnement par contraposée

Proposition 1.60

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions. Alors :

$$(\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}) \equiv \big[\text{non}(\mathscr{Q}) \implies \text{non}(\mathscr{P})\big].$$

Démonstration. Exercice : écrire la table de vérité correspondante. □

Définition 1.61. L'implication non$(\mathscr{Q}) \implies$ non$(\mathscr{P})$ s'appelle la **contraposée** de l'implication $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$.

11 Démontrer que :

$$x \notin \mathbb{Q} \implies 1 + x \notin \mathbb{Q},$$

en considérant la contraposée de cette assertion.

12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si n^2 est pair alors n l'est aussi.

III.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode destinée à déterminer les solutions d'un problème. Elle se décompose en deux étapes.

- Analyse : on cherche des conditions **nécessaires** sur les solutions éventuelles du problème. On réduit ainsi les solutions potentielles à un petit nombre.
- Synthèse : on vérifie si les solutions éventuelles trouvées à la première étape conviennent et on écarte les «faux-positifs».

Exemple 1.62. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(E) : \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{3x - 5}.$$

- Analyse : soit x une solution de (E). Alors, en élevant au carré :
$$x^2 - 3x = 3x - 5,$$
i.e.
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
et donc :
$$(x - 1)(x - 5) = 0.$$
Ainsi, **si** x est solution, **alors** $x \in \{1, 5\}$.
- Synthèse : soit $x = 5$, alors on a bien :
$$\sqrt{5^2 - 3 \times 5} = \sqrt{3 \times 5 - 5}.$$
Cependant, pour $x = 1$, l'équation (E) n'a pas de sens et donc il faut écarter la «fausse solution» $x = 1$.

Conclusion : l'équation (E) admet pour unique solution $x = 5$.

13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Démontrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Indication : on pourra écrire $f = g + h$ puis calculer $f(x) + f(-x)$ et $f(x) - f(-x)$.

III.7 Démonstration par récurrence

Théorème 1.63

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Si :

(i) $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie, (**initialisation**)

(ii) pour tout $n \geqslant n_0$, l'assertion $\big(\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)\big)$ est vraie, (**hérédité**)

alors, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$. (**conclusion**)

Exemple 1.64. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 1+3+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Notons :

$$\mathscr{P}(n) : 1+3+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

- **Initialisation**. $\mathscr{P}(1) : 1 = 1$ est vraie.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors :

$$\begin{aligned} 1+3+\ldots+(2(n+1)-1) &= [1+3+\ldots+(2n-1)]+[2(n+1)-1] \\ &= n^2+[2n+1] \\ &= (n+1)^2, \end{aligned}$$

  et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion**. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Définition 1.65. On appelle suite **arithmétique** toute suite dont le terme général vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r,$$

où $r \in \mathbb{C}$ est fixé (il ne dépend pas de n) et est appelé **raison** de la suite.

Proposition 1.66

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

Démonstration. Exercice. □

14 Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- résoudre des (in)équations faisant intervenir la fonction partie entière,
- résoudre des (in)équations faisant intervenir la fonction valeur absolue,
- résoudre des (in)équations trigonomériques,
- vous rappeler et utiliser les formules trigonomériques,
- effectuer des calculs de somme à l'aide du symbole Σ,
- effectuer des calculs de produits à l'aide du symbole Π,
- vous rappeler et utiliser les identités remarquables notamment la formule du binôme de Newton et la somme des termes d'une suite géométrique.

I Inégalités dans $\mathbb{R}$

I.1 Premières propriétés

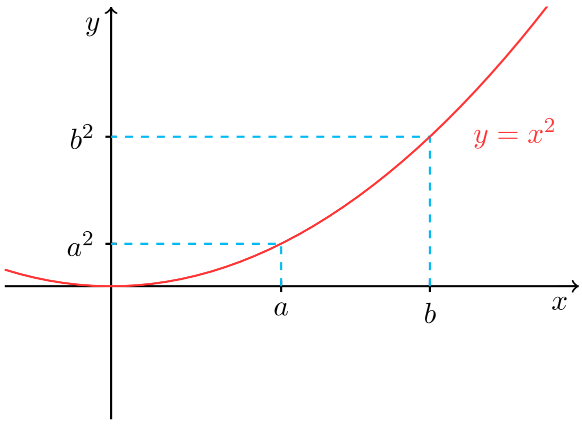
Propriétés 2.1. La **relation d'ordre** $\leqslant$ est **compatible** avec l'addition et la multiplication, au sens où, pour tous réels a, b, c et d :

- $a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad -b \leqslant -a$;
- $a \leqslant b$ et $c > 0 \quad \Longrightarrow \quad ac \leqslant bc$;
- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \quad \Longrightarrow \quad a + c \leqslant b + d$.

Remarque 2.2. Ces propriétés sont encore valables pour les relations d'ordre $\geqslant$, $<$ et $>$.

Remarque 2.3. Les inégalités sont compatibles avec les fonctions croissantes. On a donc, par exemple :

$$0 \leqslant a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad a^2 \leqslant b^2.$$



15 Soit $a \leqslant b \leqslant 0$. Que peut-on dire de a^2 et b^2 ?

I.2 Intervalles

Définition 2.4. Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est un ensemble A vérifiant :

$$\forall (a,b) \in A^2,\ \forall t \in [0;1], \quad ta + (1-t)b \in A.$$

Autrement dit, quels que soient les points a et b de A, le segment reliant a à b est inclus dans A.

Illustration 2.5. Où se trouve le point $ta + (1-t)b$ lorsque $t = 0, 1/3, 1/2, 1$?

Définitions 2.6. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$. L'**intervalle (fermé)** ou **segment** $[a;b]$ est l'ensemble des réels compris entre a et b au sens large :

$$[a;b] = \{t \in \mathbb{R},\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

L'intervalle $[a,+\infty[$ est l'ensemble des réels supérieurs à a :

$$[a,+\infty[= \{t \in \mathbb{R},\ a \leqslant t\}.$$

On définit de même les intervalles ouverts et semi-ouverts à l'aide d'inégalités strictes. Lorsque $a=b$, on parle de **singleton** et on note $\{a\}$ l'ensemble contenant uniquement l'élément a.

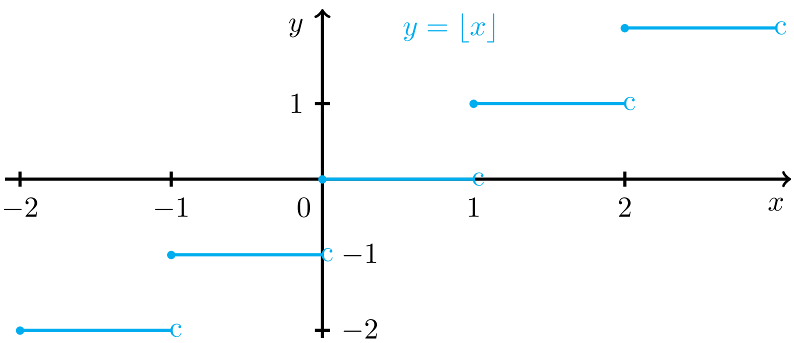
Remarque 2.7. L'ensemble vide est un intervalle.

16 Lister tous les types d'intervalles de $\mathbb{R}$ (indice : il y en a 9).

I.3 Partie entière

Définition 2.8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x et on note $\lfloor x \rfloor$ (ou $E(x)$) le plus grand entier n tel que $n \leqslant x$.

Illustration 2.9.



Exemple 2.10. $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor 12 \rfloor = 12$, $\lfloor -4 \rfloor = -4$.

Proposition 2.11

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

I.4 Approximation décimale

Proposition 2.12

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\frac{1}{10^n}\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant x < \frac{1}{10^n}\lfloor 10^n x \rfloor + \frac{1}{10^n}.$$

Démonstration. Il suffit de poser $y = 10^n x$ et d'appliquer la proposition précédente à y. □

Définition 2.13. Les nombres encadrant x dans la proposition précédente sont appelés **parties décimales par défaut** et **par excès** du nombre x à la précision 10^{-n}.

Exemple 2.14. Rappelons que $\pi = 3,141592653\ldots$. La valeur décimale par défaut à 10^{-4} près de π est $3,1415$ et celle par excès est $3,1416$.

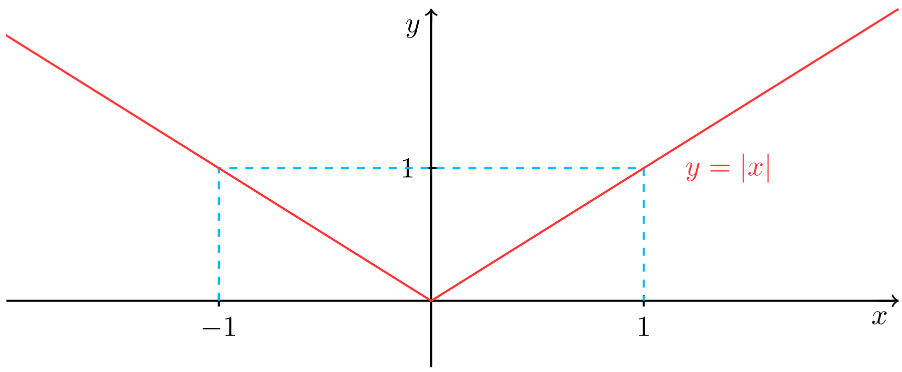
I.5 Valeur absolue

Définition 2.15. Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemples 2.16. $|-2| = 2$, $|2| = 2$, $|-40| = 40$.

Illustration 2.17. Graphe de la fonction valeur absolue.



Propriétés 2.18

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :
(i) $|x| \geqslant 0$;
(ii) $|xy| = |x||y|$;
(iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire) ;
(iv) $|x - y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$ (inégalité triangulaire renversée).

Remarque 2.19. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \geqslant 0$. Alors :
- $|x| = \max(x, -x)$;
- $|x| \leqslant r \iff -r \leqslant x \leqslant r$.

17 Résoudre l'inéquation d'inconnue x suivante : $|x - 1| \leqslant 3$. Interpréter graphiquement le résultat.

II Trigonométrie

Dans tout ce qui suit, on munit le plan d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

II.1 Le cercle trigonométrique

Définition 2.20. Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1. On le notera $\mathscr{C}$ dans la suite.

Définition 2.21. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et M le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \theta$.
- Le **cosinus** de θ, noté $\cos\theta$, est l'abscisse du point M.
- Le **sinus** de θ, noté $\sin\theta$, est l'ordonnée du point M (cf illustration 2.24).

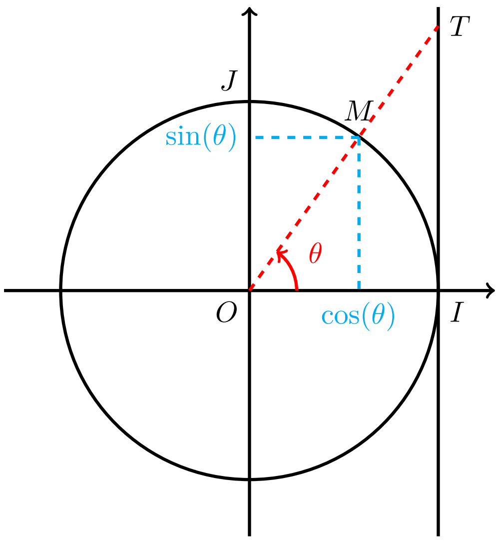
Définition 2.22. Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. La **tangente** de θ est le nombre réel :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Propriété 2.23. Si on note T le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$, alors T a pour ordonnée $\tan\theta$.

Démonstration. Exercice : appliquer le théorème de Thalès. □

Illustration 2.24.



Rappel 2.25. Le réel θ correspond à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ à laquelle on a éventuellement ajouté ou retranché un multiple de 2π.

II.2 Propriétés des fonctions circulaires

Propriétés 2.26. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$;
(ii) $-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$;
(iii) $\forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$;
(iv) $\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$;
(v) $\cos(-\theta) = \cos\theta$;
(vi) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$;
(vii) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Démonstration. Les points (i) à (vi) sont évidents. Quant au point (vii), c'est une conséquence du théorème de Pythagore. □

Proposition 2.27

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Remarque 2.28. Ces deux formules (à connaître par cœur) permettent de simplifier les expressions du type $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(\theta+\pi)$, $\sin(\pi/2-\theta)$, etc... Elles permettent aussi de retrouver les formules :

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta,$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta.$$

Exemple 2.29. On a :

$$\cos(\theta+\pi) = \cos\theta\cos\pi - \sin\theta\sin\pi = -\cos\theta.$$

Propriétés 2.30

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

Propriété 2.31

La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$:

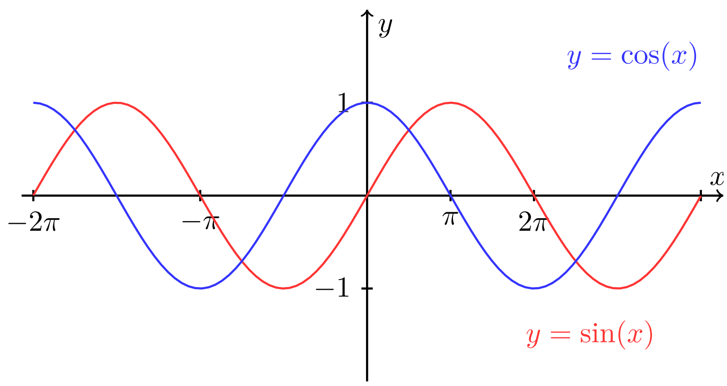
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Démonstration. Exercice. □

II.3 Représentations graphiques

La fonction cosinus est paire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction sinus est quant à elle impaire. Sa courbe représentative présente donc une symétrie par rapport à l'origine du repère.

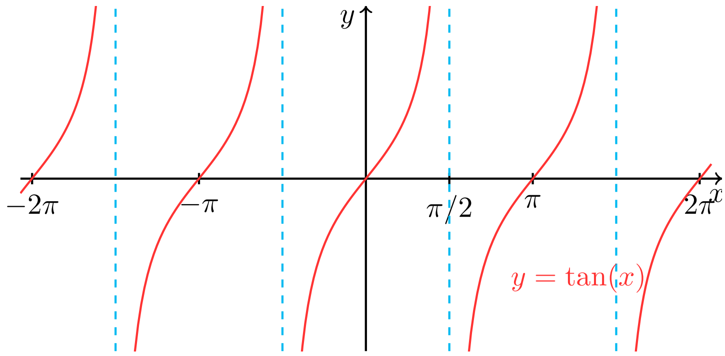
Illustration 2.32. Graphe des fonctions sinus et cosinus.



Propriété 2.33. La fonction tangente est π-périodique (c'est-à-dire que pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$) et impaire.

Démonstration. Exercice. □

Illustration 2.34. Graphe de la fonction tangente.

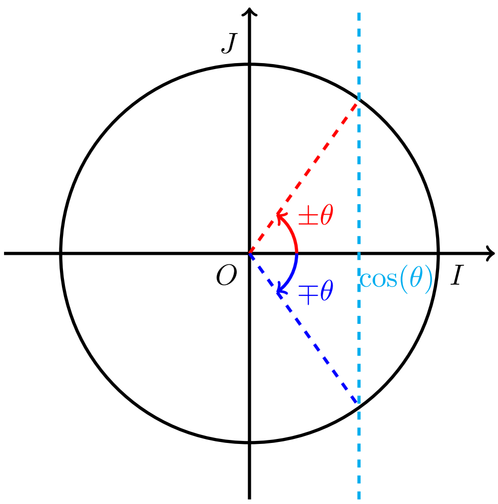


II.4 Résolution d'équations trigonométriques

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On cherche à déterminer les solutions de l'équation suivante :

$$\cos x = \cos\theta.$$

Pour ce faire, on dessine le cercle trigonométrique :



On en déduit que :

$$\cos x = \cos\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{array}{r|ll} & x & = \theta + 2k\pi, \\ \text{ou} & x & = -\theta + 2k\pi. \end{array}$$

On démontre de même que :

$$\sin x = \sin\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{array}{r|ll} & x & = \theta + 2k\pi, \\ \text{ou} & x & = \pi - \theta + 2k\pi. \end{array}$$

Enfin, si $\theta \notin \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, alors :

$$\tan x = \tan\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \theta + k\pi.$$

Remarque 2.35. Ces résultats ne sont pas à connaître par cœur. Il faut être capable de reproduire le raisonnement présenté ci-dessus.

III Sommes et produits

III.1 La notation $\sum$ (sigma)

Définition 2.36. Soit $(u_1, \cdots, u_N)$ une famille de nombres réels (ou complexes). On note :

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_N.$$

On lit «**somme** pour k variant de 1 à N des u_k».

Remarque 2.37. En toute rigueur, il faudrait définir le symbole Σ par récurrence.

Remarque 2.38. Dans la définition précédente, k est une **variable muette**. Le résultat de la somme **ne dépend pas** de k.

Exemples 2.39. On a :

$$\sum_{k=0}^{3} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \sum_{j=0}^{3} j^2,$$
$$\sum_{k=1}^{2} 2k\cos(k\pi/2) = 2\cos(\pi/2) + 2 \times 2\cos(\pi) = -4,$$
$$\sum_{k=1}^{10} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = 10.$$

Propriété 2.40

Pour toutes familles $(u_1, \cdots, u_N)$ et $(v_1, \cdots, v_N)$, pour tout nombre complexe λ :

$$\sum_{k=1}^{N} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=1}^{N} u_k + \sum_{k=1}^{N} v_k.$$

Remarque 2.41. Effectuer un **changement d'indice** dans une somme peut s'avérer utile. Par exemple :

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{p=1}^{n-2} u_{p+2}.$$

En effet, en posant $p = k - 2$, on a :

$$\begin{cases} 3 \leqslant k \leqslant n \\ p = k - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant p \leqslant n - 2 \\ k = p + 2 \end{cases}.$$

18 Écrire les deux sommes de la remarque précédente à l'aide de points de suspension et vérifier le résultat.

Proposition 2.42

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

III.2 Les notations $\prod$ (pi) et ! (factorielle)

Définition 2.43. Soit $(u_1, \cdots, u_N)$ une famille de nombres réels (ou complexes). On note :

$$\prod_{k=1}^{N} u_k = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_N.$$

On lit «**produit** pour k variant de 1 à N des u_k».

Remarque 2.44. Tout comme pour la somme, k est une **variable muette**. Le résultat du produit **ne dépend pas de** k.

Remarque 2.45. En toute rigueur, le symbole Π devrait être défini par récurrence.

Exemples 2.46. On a :

$$\prod_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2 = 36, \qquad \prod_{k=4}^{6} 2 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8.$$

Remarque 2.47. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Propriété 2.48

Pour toutes familles $(u_1, \cdots, u_N)$ et $(v_1, \cdots, v_N)$:

$$\prod_{k=1}^{N} \left(u_k v_k\right) = \left(\prod_{k=1}^{N} u_k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{N} v_k\right) \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{N} \frac{u_k}{v_k} = \frac{\prod_{k=1}^{N} u_k}{\prod_{k=1}^{N} v_k},$$

où la deuxième égalité est valable dès que $v_k \neq 0$ pour tout $k \in [\![1, N]\!]$.

IV Quelques identités remarquables

IV.1 Factorisation de $a^n - b^n$

Proposition 2.49

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \geqslant 2$ un entier. Alors :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Remarque 2.50. Il s'agit d'une généralisation de l'identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Démonstration. Il suffit de développer le produit dans le membre de droite : exercice. □

Corollaire 2.51

Soient $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

IV.2 Coefficients binomiaux

Rappel 2.52. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. On rappelle que le **coefficient binomial** k **parmi** n est défini par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque 2.53. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

19 Lister tous les sous-ensembles de $\{1,2,3,4\}$ contenant exactement 3 éléments. Calculer ensuite $\binom{4}{3}$.

Proposition 2.54

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. Alors :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Démonstration. Vue au chapitre 1. □

Proposition 2.55 (Relation de Pascal)

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$. Alors :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Illustration 2.56. Le triangle de Pascal.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

IV.3 Formule du binôme de Newton

Proposition 2.57

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque 2.58. Cette formule est à connaître par cœur !

Remarque 2.59. Il s'agit d'une généralisation de la formule :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Remarque 2.60. À l'aide du triangle de Pascal, il devient facile de développer des expressions de ce type. Par exemple :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

20 Développer $(x+y)^6$ pour deux réels quelconques x et y.

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- manipuler les symboles ensemblistes,
- déterminer l'image d'un ensemble par une application,
- déterminer l'image réciproque d'un ensemble par une application,
- déterminer le caractère bijectif ou non d'une application,
- déterminer la bijection réciproque d'une application bijective,
- effectuer des calculs de dénombrement sur des ensembles finis.

I Ensembles

I.1 Rappels du chapitre 1

Définition 3.1. Un **ensemble** E est une collection d'objets appelés **éléments**. Si x est un élément de E, alors on note $x \in E$. Sinon, on note $x \notin E$.

Remarque 3.2. On peut se représenter un ensemble par un sac. Ce que contient le sac sont ses éléments.

Exemple 3.3. L'ensemble $\{2n, n \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des nombres pairs.

Exemple 3.4. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Définition 3.5. On appelle **ensemble vide** et on note $\varnothing$ l'ensemble ne contenant aucun élément (penser à un sac vide).

Définition 3.6. Soient E et F deux ensembles. On dit qu'ils sont **égaux** et on note $E = F$ si ils contiennent les mêmes éléments.

Remarque 3.7. Il n'y a pas nécessairement de relation d'ordre dans un ensemble. Il n'y a pas non plus de répétition des éléments. Ainsi : $\{1; 2\} = \{2; 1\}$.

Définition 3.8. Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F et on note $E \subset F$ si tous les éléments de E sont aussi des éléments de F.

Remarque 3.9. $E \subset F$ si et seulement si :

$$\forall x \in E, \ x \in F.$$

Méthode. En pratique, pour démontrer que $E \subset F$, on peut commencer à raisonner de la façon suivante : «soit $x \in E$, démontrons que $x \in F$».

Remarque 3.10. Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Définition 3.11. Soient E et F deux ensembles. À partir de $x \in E$ et de $y \in F$, on forme le **couple** (x, y) défini de sorte que : $(x, y) = (x', y')$ uniquement lorsque $x = x'$ et $y = y'$.

Attention. Ici, l'ordre des éléments est important. Par exemple :

$$(1, 2) \neq (2, 1).$$

Définition 3.12. On appelle **produit cartésien** de deux ensembles E et F l'ensemble formé des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$:

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Lorsque $E = F$, on note $E^2 = E \times E$.

I.2 Ensemble des parties

Définition 3.13. Soit E un ensemble. On appelle **sous-ensemble** (ou **partie**) de E tout ensemble F inclus dans E.

Définition 3.14. Soit E un ensemble. On appelle **ensemble des parties** de E et on note $P(E)$ l'ensemble formé des sous-ensembles de E.

Exemple 3.15. Soit $E = \{1; 2; 3\}$. Alors :

$$P(E) = \big\{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}; \varnothing\big\}.$$

Exemple 3.16. Soit $E = \{a\}$. Alors :

$$P(E) = \big\{\{a\}; \varnothing\big\}.$$

Remarque 3.17. Quel que soit l'ensemble E, on a toujours $\varnothing \in P(E)$ et $E \in P(E)$.

21 Écrire $P(E)$ dans chacun des cas suivants :
- $E = \{x; y\}$;
- $E = \varnothing$;
- $E = \{\triangleleft; \triangleright\}$.

I.3 Réunion, intersection et complémentaire

Dans cette partie, on notera E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

Définition 3.18. On appelle **intersection** de A et de B et on note $A \cap B$ l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B.

Remarque 3.19. En termes mathématiques :

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B.$$

Exemple 3.20. Soient $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{3; 4; 5\}$, alors $A \cap B = \{3\}$.

Proposition 3.21

(i) $A \cap B = B \cap A$;

(ii) $A \cap A = A$;

(iii) $A \cap E = A$;

(iv) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Définition 3.22. On appelle **réunion** de A et de B et on note $A \cup B$ l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B.

Remarque 3.23. En termes mathématiques :

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Exemple 3.24. Soient $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{3; 4; 5\}$, alors $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Proposition 3.25

(i) $A \cup B = B \cup A$;

(ii) $A \cup A = A$;

(iii) $A \cup E = E$;

(iv) $A \cup \varnothing = A$.

Définition 3.26. Les ensembles A et B sont dits **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.

Définition 3.27. Le **complémentaire** de A (dans E), noté $E \backslash A$ (ou $\bar{A}$) est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

Remarque 3.28. En termes mathématiques :

$$x \in E \backslash A \iff x \in E \text{ et } x \notin A.$$

Définition 3.29. L'ensemble B **privé de** A (noté $B \backslash A$) est l'ensemble des éléments de E qui sont dans B mais pas dans A. Autrement dit :

$$B \backslash A = \{x \in E, x \in B \text{ et } x \notin A\}.$$

Exemple 3.30. Soient $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{3; 4; 5\}$. Alors :

$$E \backslash A = \{4; 5; 6\}. \quad \text{et} \quad B \backslash A = \{4; 5\}.$$

Proposition 3.31 (Lois de Morgan)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Démonstration. Démontrons le premier point. Le deuxième est laissé à titre d'exercice. Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\iff \text{non}\,(x \in A \cup B) \\ &\iff \text{non}\,(x \in A \text{ ou } x \in B) \\ &\iff \text{non}(x \in A) \text{ et non}(x \in B), \end{aligned}$$

où le dernier point provient des Lois de Morgan vues au chapitre 1. On a donc démontré que :

$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \in \overline{A} \text{ et } \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Ainsi, les éléments de $\overline{A \cup B}$ sont les mêmes que ceux de $\overline{A} \cap \overline{B}$. □

Proposition 3.32 (Distributivité)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Démonstration. Notons P, Q et R les assertions $x \in A$, $x \in B$ et $x \in C$ respectivement. Alors, la première propriété se traduit par :

$$P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \equiv (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R).$$

La deuxième propriété se démontre de manière analogue (exercice). □

II Applications

II.1 Définitions

Définition 3.33. Soient E et F deux ensembles. Une **application** f de E dans F est la donnée d'une partie Γ de $E \times F$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ (x, y) \in \Gamma.$$

Γ est appelé le **graphe** de la fonction f.

Remarque 3.34. Cette définition très formelle est une reformulation la définition 1.18 donnée dans le chapitre 1. Elle met en exergue le fait qu'une application (ou une fonction) prend une valeur et une seule en un point donné de l'ensemble de départ. C'est pourquoi un trait vertical sur le graphe d'une fonction n'a aucun sens !

Définitions 3.35. Si $x \in E$, alors on note $f(x)$ l'unique y de la définition précédente. Il est appelé l'**image** par f de l'élément x. Pour tout $y \in F$, les x tels que $f(x) = y$ (si il y en a) sont appelés **antécédents** par f de y. On écrira l'application f de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} f & : & E & \to & F. \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque 3.36. Une application est donc la donnée de 3 éléments : l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et les images des éléments de l'ensemble de départ. Les applications ci-dessous sont donc toutes différentes :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+, \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} h & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Remarque 3.37. On peut définir une fonction en donnant la liste de ses images plutôt qu'à l'aide d'une «formule» générale. Par exemple :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \{1;2;3\} & \to & \{a;b\}. \\ & & 1 & \mapsto & a \\ & & 2 & \mapsto & b \\ & & 3 & \mapsto & a \end{array}$$

Remarque 3.38. On peut définir une fonction par disjonction de cas, comme on l'a fait par exemple pour la valeur absolue.

Définition 3.39. Soit E un ensemble. L'application **identité** sur E est l'application :

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{id}_E & : & E & \to & E. \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$$

Exemple 3.40. Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels peut être vue comme une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcccc} u & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}. \\ & & n & \mapsto & u_n \end{array}$$

C'est d'ailleurs pourquoi on utilise parfois la notation $u(n)$ plutôt que u_n.

Définition 3.41. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E,F)$ (ou parfois F^E).

Remarque 3.42. On écrira indifféremment « f est une application de E dans F » ou « $f \in \mathscr{F}(E,F)$ » ou encore $f\colon E \to F$.

II.2 Restriction et composition

Définition 3.43. Soient $f\colon E \to F$ une application et $A \subset E$. La **restriction** de f à A est l'application :

$$f_{|A} \quad : \quad \begin{array}{ccc} A & \to & F. \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple 3.44. Considérons la fonction sinus :

$$\sin \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

Sa restriction à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ est :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} [-\pi/2, \pi/2] & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

Définition 3.45. Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux applications. La **composée** de f par g, notée $g \circ f$ est :

$$g \circ f \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \to & G. \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Cette application est bien définie car lorsque $x \in E$, $f(x) \in F$.

22 Soient les fonctions f et g définies par :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+. \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Déterminer $g \circ f$.

Exemple 3.46. Considérons $E = \{1; 2\}$, $F = \{7, 8, 9\}$ et $G = \{-1, -2\}$. Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to H$ définies par :

- $f(1) = 7$,
- $f(2) = 9$,
- $g(7) = g(8) = g(9) = -1$.

Alors :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = -1.$$

Remarque 3.47. En général, $f \circ g \neq g \circ f$. Il se peut d'ailleurs que $g \circ f$ ait un sens alors que $f \circ g$ ne soit pas définie (cf exemple précédent).

Proposition 3.48

Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$, $g \in \mathscr{F}(F,G)$ et $h \in \mathscr{F}(G,H)$, alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \text{et} \qquad f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_F \circ f = f.$$

Démonstration. Exercice. □

II.3 Image d'un ensemble par une application

Définition 3.49. Soient $f \colon E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle **image** de A par f et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}.$$

Exemple 3.50. Considérons $E = \{1; 2; 3\}$, $F = \{a, b, c\}$ et $f \colon E \to F$ définie par :

$$f(1) = f(2) = a \text{ et } f(3) = c.$$

Alors :
- $f(\{1; 2\}) = \{f(x), x \in \{1; 2\}\} = \{f(1); f(2)\} = \{a\}$;
- $f(E) = \{f(x), x \in E\} = \{f(1); f(2); f(3)\} = \{a; c\}$.

23 Soit f l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$$

Déterminer $f(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R}_+)$.

Remarque 3.51. Si $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $a \in E$, alors on a toujours :

$$f(\varnothing) = \varnothing, \quad f(\{a\}) = \{f(a)\} \quad \text{et} \quad f(E) \subset F.$$

Exemple 3.52. Soient $E = F = \mathbb{R}$ et :

$$\begin{array}{rccc} f & : & E & \to & F \\ & & x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Alors, $f(E) \subsetneq F$. On peut changer l'espace d'arrivée pour qu'il y ait égalité, mais il ne s'agit alors plus de la même application !

II.4 Image réciproque d'un ensemble par une application

Définition 3.53. Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F. Pour toute partie B de F, on appelle **image réciproque** de B par f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$ défini par :

$$f^{-1}(B) = \big\{x \in E,\ f(x) \in B\big\}.$$

Autrement dit :

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

Remarque 3.54. On a toujours $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. De plus, pour tout élément b de F :

$$f^{-1}\big(\{b\}\big) = \big\{x \in E,\ f(x) = b\big\}.$$

24 Soit :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

1. Déterminer $f^{-1}(\{4\})$.
2. Déterminer $f^{-1}(\{-1\})$.
3. Déterminer $f^{-1}([-1; 2])$.

II.5 Applications bijectives

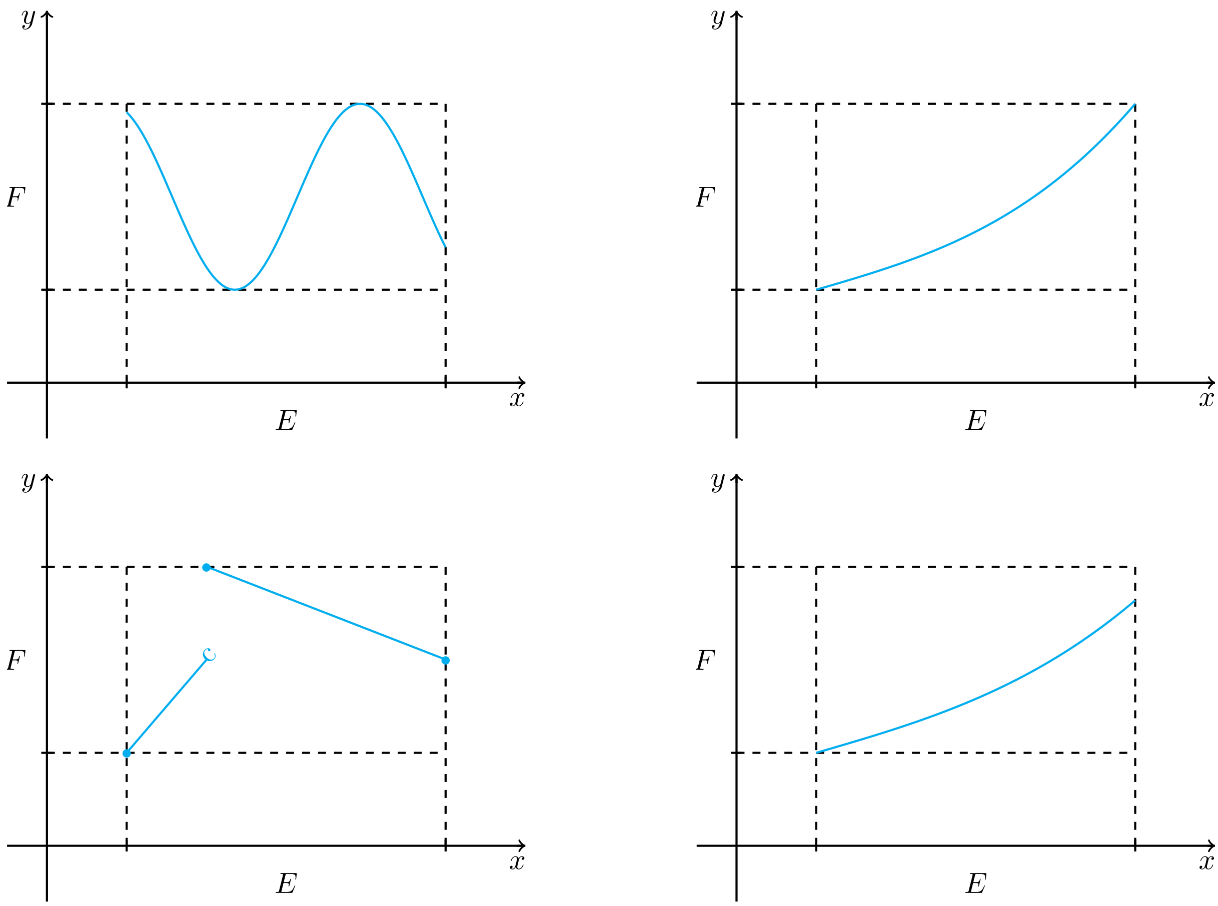
II.5.1 Définition

Définition 3.55. Soit $f \in \mathscr{F}(E, F)$. On dit que :

- f est **injective** si :
$$\forall (x, x') \in E^2,\ \big(x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')\big)$$
Autrement dit, f ne prend jamais deux fois la même valeur.
- f est **surjective** si :
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$
Autrement dit, tous les éléments de F admettent au moins un antécédent par f.
- f est **bijective** si :
$$\forall y \in F,\ \exists ! x \in E,\ f(x) = y.$$
Autrement dit, tous les éléments de F admettent exactement un antécédent par f.

Remarque 3.56. Une application est bijective ssi elle est injective et surjective.

25 Parmi ces applications de E dans F, lesquelles sont injectives ? Surjectives ? Bijectives ? Justifier.



26 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ Alors, f n'est pas bijective. Pourquoi ?

Qu'en est-il des applications $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$?

Méthode. Pour étudier le caractère bijectif d'une application $f\colon E \to F$, on résout pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$:
- si pour tout $y \in F$ cette équation admet une unique solution $x \in E$, alors f est bijective
- s'il existe au moins un élément $y \in F$ pour lequel cette équation n'admet aucune solution $x \in E$ ou admet au moins deux solutions distinctes, alors f n'est pas bijective.

Exemple 3.57. Soit f l'application définie par $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & [1,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$.

Soit $y \in [1,+\infty[$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Alors :

$$y = f(x) \iff y = x^2+1 \iff x^2 = y-1 \iff x = \sqrt{y-1},$$

où la dernière équivalence découle de $x \geqslant 0$ et de $y \geqslant 1$. Ainsi, f est bijective.

Remarque 3.58. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Pour démontrer qu'une application $f\colon I \to J$ **continue** est bijective, on pourra démontrer qu'elle est strictement monotone et étudier ses limites aux bornes de l'intervalle.

Exemple 3.59. Soit f l'application définie par $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & [1;+\infty[\\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$.
Alors, l'application f est strictement croissante car : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) = \exp(x) > 0$. De plus, $f(0) = 1$ et $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Ainsi, f effectue une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1,+\infty[$.

Proposition 3.60

Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f$ est une application bijective.

II.5.2 Bijection réciproque

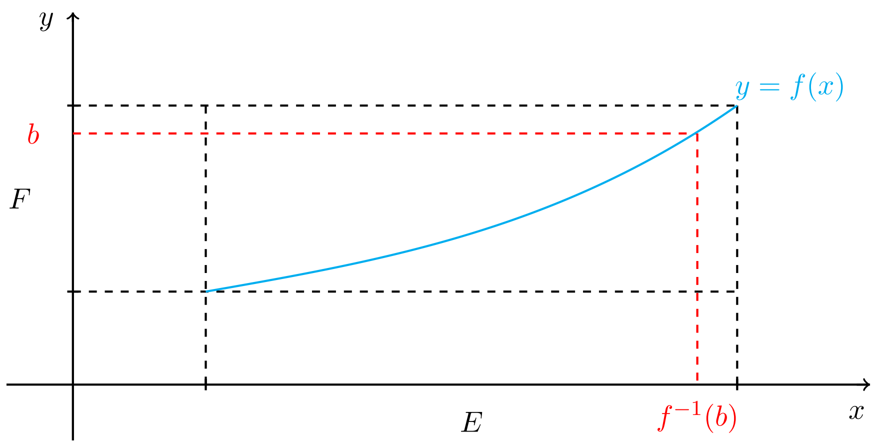
Définition 3.61. Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ une application bijective. On appelle **bijection réciproque** de f et on note f^{-1} l'application qui a tout élément de F associe son unique antécédent par f.

Remarque 3.62. Si f est bijective alors pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$:

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Méthode. Pour déterminer la bijection réciproque d'une application bijective $f\colon E \to F$, on résout pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$: l'unique antécédent x par f de y est $f^{-1}(y)$.

Illustration 3.63.



Exemple 3.64. Soit f l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & [3;5]. \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$$

Soient $y \in [3;5]$ et $x \in [0;1]$. Alors :

$$y = f(x) \iff y = 2x+3 \iff x = (y-3)/2.$$

Ainsi, la bijection réciproque de f est :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [3;5] & \to & [0;1]. \\ y & \mapsto & (y-3)/2 \end{array}$$

Remarquons maintenant que pour tout $x \in [0;1]$:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) = \big((2x+3)-3\big)/2 = x.$$

De plus, pour tout $y \in [3;5]$:

$$f(f^{-1}(y)) = f\big((y-3)/2\big) = 2\big((y-3)/2\big) + 3 = y - 3 + 3 = y.$$

27 Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \{\circ;\triangleleft\} & \to & \{-1,1\}. \\ \circ & \mapsto & 1 \\ \triangleleft & \mapsto & -1 \end{array}$$

L'application f est-elle bijective ? Le cas échéant, déterminer sa bijection réciproque.

28 Soient $E = \{1;2;3\}$, $F = \{a,b,c\}$ et $f\colon E \to F$ l'application définie par :

$$f(1) = a,\ \ f(2) = c \ \text{ et } \ f(3) = b.$$

Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Proposition 3.65

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ une application bijective. Alors :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$

De plus, f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Théorème 3.66

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ une application. Alors, il y a équivalence entre :

(i) f est bijective ;

(ii) Il existe $g \in \mathscr{F}(F,E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

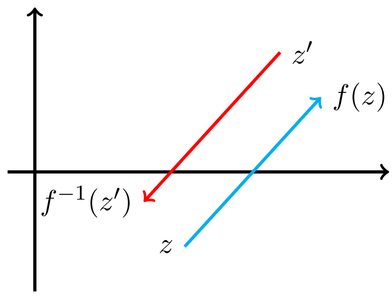
De plus, si tel est le cas, g est unique et $g = f^{-1}$.

Exemple 3.67.
Considérons la translation de vecteur $(1, 1)$ dans $\mathbb{C}$:

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}, \\ z & \mapsto & z + (1 + i) \end{array}$$

ainsi que la translation de vecteur $(-1, -1)$ dans $\mathbb{C}$:

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}. \\ z & \mapsto & z - (1 + i) \end{array}$$



Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(g(z)) = f\big(z - (1 + i)\big) = \big(z - (1 + i)\big) + (1 + i) = z,$$

et

$$g(f(z)) = g\big(z + (1 + i)\big) = \big(z + (1 + i)\big) - (1 + i) = z.$$

Donc, f est bijective et $f^{-1} = g$.

Exemple 3.68. Soit f l'application définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^\star. \\ x & \mapsto & x + 1 \end{array}$$

Définissons l'application $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^\star & \to & \mathbb{N}. \\ x & \mapsto & x - 1 \end{array}$ Alors, on vérifie aisément que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^\star}$. Donc, f est bijective et $f^{-1} = g$.

Remarque 3.69. Il faut vérifier les deux conditions $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$ pour démontrer que f est bijective. En effet, prenons :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+, \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \big(\sqrt{x}\big)^2 = x.$$

Pourtant, ni f ni g ne sont bijectives.

Proposition 3.70

Soient $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $g \in \mathscr{F}(F, G)$ deux applications bijectives. Alors, $g \circ f$ est bijective et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

III Ensembles finis

Définition 3.71. Un ensemble E est dit **fini** s'il existe un entier n ainsi qu'une bijection de E dans $[\![1, n]\!]$.

Remarque 3.72. Par convention, on dira aussi que l'ensemble vide est fini.

$\boxed{29}$ Démontrer que l'ensemble $\{a, b, c\}$ est fini.

Définition 3.73. Un ensemble est dit **infini** s'il n'est pas fini.

Exemple 3.74. $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont infinis.

Propriété 3.75. Si un ensemble E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$ et $[\![1,m]\!]$, alors $n=m$.

Définition 3.76. Le **cardinal** d'un ensemble fini E est l'entier n de la définition 3.71. On le note $\mathrm{Card}(E)$ (ou $\sharp E$ ou $|E|$). On convient que $\mathrm{Card}(\varnothing)=0$.

Exemple 3.77. L'ensemble $\{a,b,c\}$ est de cardinal 3.

Proposition 3.78

Soient E un ensemble **fini** et A et B deux parties de E. Alors :

(i) A et B sont finis de cardinal inférieur à $\mathrm{Card}(E)$;

(ii) $A=E \iff \mathrm{Card}(A)=\mathrm{Card}(E)$;

(iii) $\mathrm{Card}(E\backslash A)=\mathrm{Card}(E)-\mathrm{Card}(A)$;

(iv) $\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B)$;

(v) $\mathrm{Card}(A\times B)=\mathrm{Card}(A)\mathrm{Card}(B)$.

Méthode. Pour démontrer que deux parties A et B d'un ensemble fini E sont égales, on pourra démontrer que $A\subset B$ et que $\mathrm{Card}(A)=\mathrm{Card}(B)$.

Proposition 3.79

Soient E un ensemble fini et $A_1,\dots,A_N$ une famille de sous-ensembles de E disjoints deux à deux. Alors :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Card}(A_i).$$

IV Dénombrement

Dans tout ce qui suit, n et p désignent deux entiers vérifiant $0\leqslant p\leqslant n$, et E désigne un ensemble à n éléments.

IV.1 Arrangements

Définition 3.80. Un **arrangement** de p éléments (ou un p-**arrangement**) de E est une liste ordonnée de p éléments de E deux à deux distincts.

Exemple 3.81. Soit $E=\{1;2;3\}$. Les arrangements de 2 éléments de E sont :

$$(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2).$$

Proposition 3.82

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de p-arrangements de E est :

$$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemple 3.83. Combien y a-t-il de numéros de téléphone à 5 chiffres dont tous les chiffres sont distincts ? Il y en a $A_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 30240$.

Exemple 3.84. Combien y a-t-il de podiums possibles lors d'une course avec 8 athlètes ? Il y en a $A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 336$.

IV.2 Combinaisons

Définition 3.85. Une **combinaison** de E à p éléments est un sous-ensemble de E à p éléments.

Exemple 3.86. Soit $E = \{a, b, c\}$. Les combinaisons de E à 2 éléments sont :

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}.$$

Ici, l'ordre ne compte pas.

Proposition 3.87

Soient E un ensemble de cardinal n et $p \leqslant n$. Le nombre de combinaisons à p éléments de E est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

30 Au loto, on tire 6 boules numérotées parmi 49. Combien y a-t-il d'issues possibles ?

IV.3 Ensemble des parties

Proposition 3.88

Soit E un ensemble de cardinal n, alors :

$$\mathrm{Card}\,(\mathscr{P}(E)) = 2^n.$$

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- écrire un nombre complexe sous forme algébrique et sous forme exponentielle,
- maîtriser le lien entre les opérations sur les nombres complexes et la géométrie du plan,
- rappeler les formules de Moivre et d'Euler,
- déterminer les racines carrées d'un nombre complexe,
- résoudre une équation du second degré à coefficients complexes,
- déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe,
- linéariser ou développer une expression faisant intervenir des sinus et/ou des cosinus.

I Premières définitions

Théorème 4.1

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ ainsi qu'un élément i vérifiant :

(i) $i^2 = -1$;

(ii) tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme $a+ib$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;

(iii) les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$ prolongent celles existant déjà sur $\mathbb{R}$ en conservant leurs propriétés.

Remarque 4.2. On peut construire l'ensemble $\mathbb{C}$ en l'identifiant au plan. On définit alors l'addition de deux points du plan (a,b) et (a',b') de manière classique et leur multiplication de la manière suivante :

$$(a,b) \times (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b),$$

qui correspond évidemment au produit que l'on connaît :

$$(a+ib)(a'+ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b).$$

Il faut ensuite vérifier toutes les propriétés usuelles de ces opérations (associativité, distributivité, commutativité, etc...).

Définitions 4.3. L'écriture $z = a + ib$ est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z. Les réels a et b sont appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** de z. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Propriétés 4.4. Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

(i) $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$;

(ii) $\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

Démonstration. Exercice. □

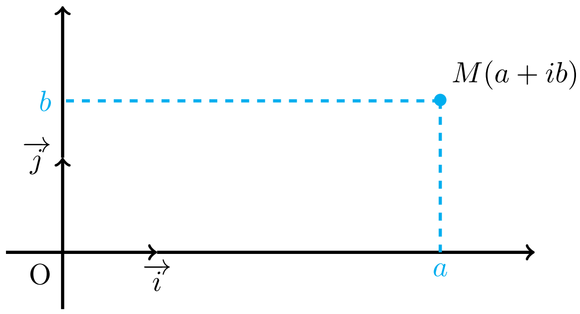
I.1 Représentation géométrique des nombres complexes

Dans tout ce qui suit, on munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 4.5. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **point d'affixe** z le point M de coordonnées (a,b), où $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. On note souvent $M(z)$.

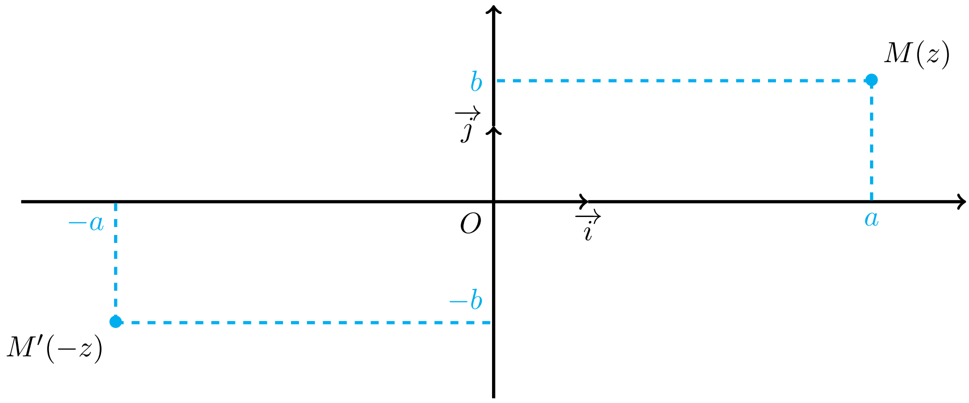
Remarque 4.6. Cette définition permet d'identifier le plan à $\mathbb{C}$.

Illustration 4.7.



Propriété 4.8. Si M est le point d'affixe z, alors le point M' d'affixe $-z$ est le symétrique de M par rapport à O.

Illustration 4.9.

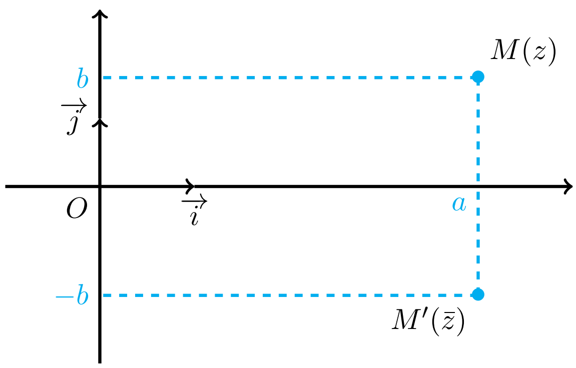


I.2 Conjugaison

Définition 4.10. Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $a - ib$.

Propriété 4.11. Si M est le point d'affixe z, alors le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.

Illustration 4.12.



Proposition 4.13

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

(i) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

(ii) $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$;

(iii) Si $z \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$;

(iv) $\overline{\overline{z}} = z$.

Démonstration. Exercice. □

I.3 Module d'un nombre complexe

Définition 4.14. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On appelle **module** de z et on note $|z|$ le nombre réel positif :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque 4.15. Soit M le point d'affixe z. Alors, $|z|$ correspond à la longueur OM.

Propriété 4.16

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, $|z|^2 = z\overline{z}$.

Démonstration. Exercice. □

Propriété 4.17. Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B, alors :

$$AB = |z_B - z_A|.$$

Proposition 4.18

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

(i) $|zz'| = |z||z'|$;

(ii) $|z| = |\overline{z}|$;

(iii) Si $z \neq 0$ alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$;

(iv) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

(v) $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Démonstration. Les points (i) à (iv) sont laissés à titre d'exercice. Le point (v) est admis. □

I.4 Exponentielle imaginaire

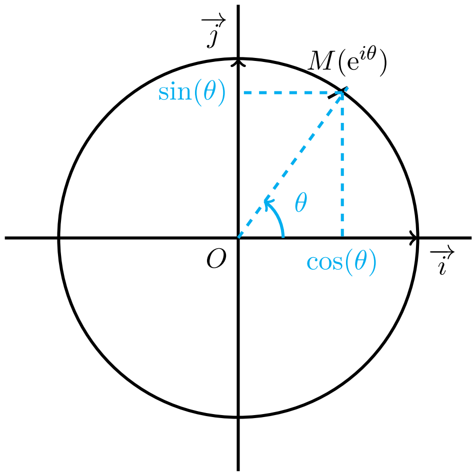
Définition 4.19. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Remarque 4.20. Le point d'affixe $e^{i\theta}$ se situe sur le cercle unité. Rappelons que le cercle unité est l'ensemble des points situés à une distance 1 de l'origine. Or, si M est d'affixe $e^{i\theta}$ alors :

$$OM = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1.$$

Illustration 4.21.



Exemples 4.22. $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{-i\pi/6} = \sqrt{3}/2 - i/2$.

Proposition 4.23

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 4.24. Soient a, b et c trois nombres réels. La notation $a \equiv b\,[c]$ signifie que a et b sont égaux à un multiple (positif ou négatif) de c près, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kc$.

Proposition 4.25

Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'\,[2\pi].$$

Démonstration. Exercice : on pourra passer à la forme algébrique et identifier parties réelles et parties imaginaires. □

Proposition 4.26

Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}.$$

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 4.27 (Formule de Moivre)

Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \mathrm{e}^{ik\theta}.$$

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{N}$: démonstration par récurrence laissée en exercice. □

Remarque 4.28. Attention ! Cette formule n'est valable que pour $k \in \mathbb{Z}$. En effet, pour $k = \frac{1}{2}$ et $\theta = 2\pi$, on a $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k \neq \mathrm{e}^{ik\theta}$ puisque :
$$\begin{cases} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \left(\mathrm{e}^{i2\pi}\right)^{1/2} = 1 \\ \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{i\pi} = -1. \end{cases}$$

Proposition 4.29 (Formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$

I.5 Argument d'un nombre complexe non nul

Théorème 4.30

Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, il existe un réel θ unique à 2π près tel que :
$$\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{i\theta}.$$

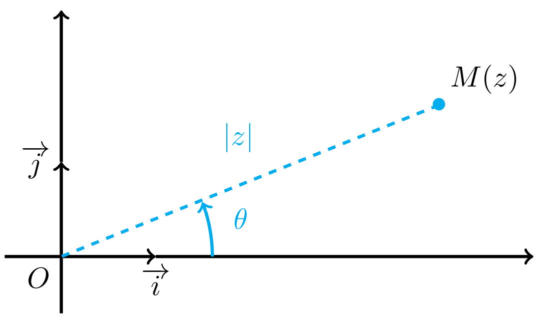
Démonstration. Admis. □

Définition 4.31. Tout réel θ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$ est appelé **argument** de z et on note $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Remarque 4.32. Le théorème 4.30 signifie que si θ est un argument de z, alors l'ensemble des arguments de z est l'ensemble des réels θ' qui s'écrivent $\theta' \equiv \theta\ [2\pi]$.

Remarque 4.33. Si M est le point d'affixe z, alors $\arg(z) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})\ [2\pi]$.

Illustration 4.34.



Exemple 4.35. $\arg(-1) \equiv \arg(e^{i\pi}) \equiv \pi\ [2\pi]$.

Exemple 4.36. Déterminons un argument du nombre complexe $z = 1 + i$. On a :

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Donc :

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}.$$

Ainsi :

$$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

Remarque 4.37. Attention ! L'argument du complexe $z = -e^{i\pi/2}$ **n'est pas** $\pi/2$. En effet :

$$-e^{i\pi/2} = e^{i\pi}e^{i\pi/2} = e^{i(\pi+\pi/2)} = e^{i3\pi/2}, \quad \arg\left(-e^{i\pi/2}\right) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi].$$

31 Déterminer $\arg(1 + i\sqrt{3})$.

Définition 4.38. Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et θ un argument de z. Posons $r = |z|$. L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée **forme exponentielle** (ou **forme polaire**) de z.

Exemple 4.39. En reprenant les calculs effectués à l'exemple 4.36, on obtient :

$$1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}.$$

32 Écrire $1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle.

Proposition 4.40

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$. Alors :

(i) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;

(ii) $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;

(iii) $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$;

(iv) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;

(v) $\forall k \in \mathbb{Z}, \arg(z^k) \equiv k\arg(z)\ [2\pi]$.

Démonstration. Les deux premiers points seront démontrés en classe. Les autres sont laissés à titre d'exercice. □

Proposition 4.41

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$. Alors :

(i) $\arg(z) \equiv 0\ [\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;

(ii) $z = z' \Leftrightarrow \big(|z| = |z'| \text{ et } \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]\big)$.

Proposition 4.42

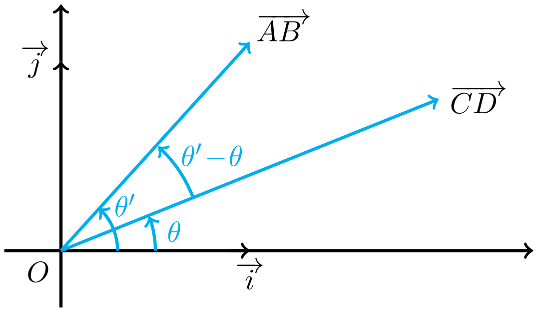
Soient A, B, C et D quatre points 2 à 2 distincts et d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Alors :

$$\arg(z_B - z_A) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}})\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}})\ [2\pi].$$

Illustration 4.43. La première propriété traduit le fait que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont, en terme d'affixe, $z_B - z_A$. De plus, d'après les propriétés des arguments, on sait que :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = \arg(z_B - z_A) - \arg(z_D - z_C)\ [2\pi].$$

La deuxième propriété traduit donc le fait que l'angle entre CD et AB s'écrit comme une différence. Pour l'illustrer, on a placé les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ à l'origine.



$$\arg(z_B - z_A) \equiv \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB})} \equiv \theta'\ [2\pi]$$

$$\arg(z_D - z_C) \equiv \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD})} \equiv \theta\ [2\pi]$$

II Résolution d'équations

II.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Proposition 4.44

Soit $\Delta \in \mathbb{C}^\star$. Alors, il existe exactement deux nombres complexes δ et $-\delta$ tels que $\delta^2 = \Delta$.

Définition 4.45. Un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$ est appelé **une racine carrée** de Δ.

Remarque 4.46. Soit x un nombre réel positif. On définit **la** racine carrée de x comme étant **le** nombre réel positif qui, élevé au carré, vaut x. Ce **choix** permet d'écrire :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Cependant, pour un nombre négatif (ou un nombre complexe), il n'y a pas de choix satisfaisant. En effet, si on pouvait définir une fonction racine carrée sur $\mathbb{C}$ compatible avec le produit, alors on pourrait écrire :

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1;$$

ce qui est impossible. La fonction racine carrée n'est donc pas définie sur $\mathbb{C}$ et écrire $\sqrt{\Delta}$ pour un nombre qui n'est pas positif **n'a pas de sens**.

Attention. Ne jamais définir une racine carrée δ de Δ par :

$$\text{« soit } \delta = \sqrt{\Delta} \text{ »} \qquad \text{ou} \qquad \text{« soit } \delta^2 = \Delta \text{ »},$$

mais écrire à la place : « soit δ une racine carrée de Δ » ou « soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$ ».

Exemple 4.47. Déterminons les racines carrées de $\Delta = 1 + i$. Une méthode consiste à écrire Δ sous forme exponentielle :

$$\Delta = \sqrt{2}(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}.$$

Ainsi, les racines carrées de Δ sont :

$$\delta_1 = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/8} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/8} = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{i\pi/8} = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{i9\pi/8}.$$

Une autre méthode consiste à poser $\delta = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et à résoudre l'équation $\delta^2 = \Delta$. On a :

$$\delta^2 = 1 + i \iff \begin{cases} |\delta|^2 = |1+i| \\ a^2 + i2ab - b^2 = 1 + i \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{2} \\ a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = \sqrt{2} + 1 \\ 2b^2 = \sqrt{2} - 1 \\ 2ab = 1 \end{cases}.$$

La troisième équation permet de dire que a et b sont de même signe. On en déduit que les deux racines carrées de Δ sont :

$$\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2} + i\sqrt{(\sqrt{2}-1)/2} \quad \text{et} \quad -\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2} - i\sqrt{(\sqrt{2}-1)/2}.$$

33 À partir de cet exemple, déterminer la valeur de $\cos(\pi/8)$.

34 Déterminer les racines carrées de $\Delta = 8 + 6i$.

II.2 Équations du second degré à coefficients complexes

Théorème 4.48

Soient $a \in \mathbb{C}^\star$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$. On considère l'équation :

$$(E) : az^2 + bz + c = 0.$$

On appelle **discriminant** de (E) le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

(i) Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une solution (dite **double**) donnée par :

$$z = \frac{-b}{2a}.$$

(ii) Si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet deux solutions données par :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a},$$

où δ est un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.

Remarque 4.49. Soient δ et $-\delta$ les deux racines carrées de Δ. Alors, si on choisit $-\delta$ à la place de δ, les rôles de z_1 et de z_2 sont échangés. On obtient donc bien les mêmes solutions.

Exemple 4.50. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 + 1 = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = 0 - 4 = -4$. Posons $\delta = 2i$. Alors $\delta^2 = \Delta$. Les solutions de (E) sont donc :

$$z_1 = \frac{-0-2i}{2} = -i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-0+2i}{2} = i.$$

35 Résoudre l'équation d'inconnue z donnée ci-dessous :

$$z^2 - (1+i)z - 2 - i = 0.$$

II.3 Racines n-ièmes

II.3.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 4.51. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On appelle **racine n-ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Exemple 4.52. $\mathbb{U}_1 = \{1\}$ et $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$.

Exemple 4.53. Quels sont les racines quatrièmes de l'unité ? On résout :

$$z^4 = 1.$$

On sait que :

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i).$$

On en déduit qu'il y a 4 racines qui sont 1, -1, i et $-i$. Donc $\mathbb{U}_4 = \{1; -1; i; -i\}$.

Remarque 4.54. Cette méthode ne fonctionne que dans des cas très particuliers. En effet, comment résoudre, par exemple, $z^7 = 1$?

36 En écrivant z sous forme exponentielle et en identifiant modules et arguments, résoudre l'équation $z^7 = 1$.

Théorème 4.55

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Les racines n-ièmes de l'unité sont les n nombres complexes deux à deux distincts $\omega_0, \cdots, \omega_{n-1}$ définis par :

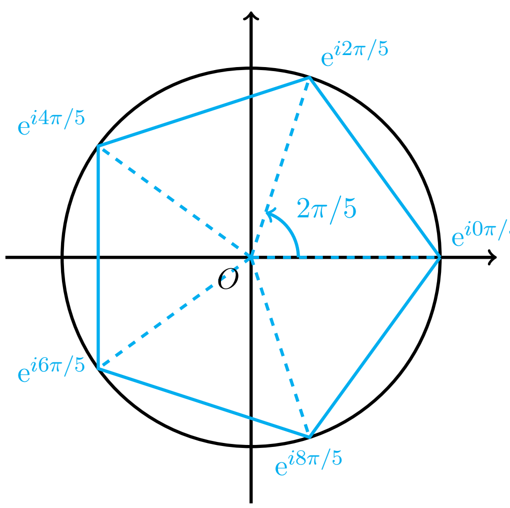
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \omega_k = \mathrm{e}^{i2k\pi/n}.$$

Exemple 4.56. Les racines cubiques de l'unité sont 1, $\mathrm{e}^{i2\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{i4\pi/3}$.

Proposition 4.57

Notons $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ les n racines de l'unité comme dans le théorème précédent et M_0,...,M_{n-1} les points correspondants dans le plan complexe. Alors, $M_0M_1 \ldots M_{n-1}$ est un n-gone régulier de centre O.

Illustration 4.58. Pour $n = 5$, on obtient un pentagone.



II.3.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soit $a \in \mathbb{C}^\star$. Déterminer les racines n-ièmes de a, c'est déterminer les solutions de l'équation :

$$z^n = a.$$

Pour ce faire, on procède comme dans la démonstration du théorème portant sur les racines n-ièmes de l'unité.

Exemple 4.59. Déterminons les racines cubiques de $\alpha = 12 - i12\sqrt{3}$. Commençons par écrire α sous forme polaire :

$$12 - i12\sqrt{3} = 24\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 24\,\mathrm{e}^{-i\pi/3}.$$

Soit $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho > 0$. Alors $z^3 = \rho^3\,\mathrm{e}^{i3\theta}$ et donc :

$$z^3 = 12 - i12\sqrt{3} \iff \begin{cases} \rho^3 = 24 \\ 3\theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 2\sqrt[3]{3} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}.$$

On prend alors trois valeurs consécutives de k dans l'équation ci-dessus et on en déduit que les racines cubiques de $12 - i12\sqrt{3}$ sont :

$$2\sqrt[3]{3}\,\mathrm{e}^{-i\pi/9},\quad 2\sqrt[3]{3}\,\mathrm{e}^{i5\pi/9} \quad \text{et} \quad 2\sqrt[3]{3}\,\mathrm{e}^{i11\pi/9}.$$

37 Déterminer les racines quatrièmes de $1 - i$.

Théorème 4.60

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a \in \mathbb{C}^\star$. Les racines n-ièmes de a sont les n nombres complexes deux à deux distincts :

$$\zeta_k = |a|^{1/n}\mathrm{e}^{i(\arg(a)+2k\pi)/n}, \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

Démonstration. Très bon exercice : s'inspirer de l'exemple 4.59. □

Remarque 4.61. Ce résultat n'est pas à connaître par cœur. Il vous sera demandé de reproduire le raisonnement présenté dans l'exemple 4.59.

III Formules trigonométriques

III.1 Linéarisation d'une expression

Linéariser une expression, c'est la mettre sous forme d'une somme. Pour nous, il s'agira de transformer un produit de cosinus et de sinus en une somme. Pour ce faire, on utilisera les formules d'Euler.

Exemple 4.62. Supposons que l'on veuille linéariser l'expression $\cos(x)^2\sin(x)$. On utilise alors les formules d'Euler, on développe le produit, puis on regroupe les exponentielles d'arguments opposés pour utiliser à nouveau les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)\sin(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{i2x}+2+e^{-i2x}\right)\cdot\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{i3x}-e^{ix}+2e^{ix}-2e^{-ix}+e^{-ix}-e^{-i3x}\right)\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}+\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\\
&= \frac{1}{4}(\sin(3x)+\sin(x)).
\end{aligned}$$

38 Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos(x)\sin(x)$ à l'aide de la méthode précédente et retrouver la formule de trigonométrie usuelle correspondante.

III.2 Développement d'un sinus ou d'un cosinus

À l'aide de la formule de Moivre, on peut développer les expressions du type $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$ et les exprimer en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

Exemple 4.63. Exprimons $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$ en utilisant la formule de de Moivre. On a :

$$e^{i3\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^3,$$

i.e.

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta) = \left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^3.$$

En développant le membre de droite à l'aide de la formule du binôme, on trouve que :

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta) = \cos^3(\theta)+3i\cos^2(\theta)\sin(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-i\sin^3(\theta).$$

D'où, en identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\\
\sin(3\theta) &= 3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta).
\end{aligned}$$

39 Exprimer $\sin(2\theta)$ à l'aide de $\sin(\theta)$ et de $\cos(\theta)$ en utilisant la méthode précédente.

IV Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 4.64. Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$. On définit l'**exponentielle** de z comme étant le nombre :

$$\exp(z) = e^a e^{ib} = e^a\left(\cos(b)+i\sin(b)\right).$$

Exemple 4.65. Soit $z = \ln(2)+i\pi/4$, alors :

$$e^z = e^{\ln 2}e^{i\pi/4} = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}+i\sqrt{2}.$$

Remarque 4.66. Si z est un réel, $z = a+i0$, alors :

$$\exp(z) = e^a e^{i0} = e^a.$$

De même, si z est imaginaire pur, $z = 0 + ib$, alors :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^0 \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{ib}.$$

La fonction exponentielle ainsi définie **prolonge** donc la fonction exponentielle réelle ainsi que la fonction exponentielle imaginaire. C'est pourquoi on note souvent e^z plutôt que $\exp(z)$.

Proposition 4.67

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

(i) $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}$;

(ii) $\overline{(\mathrm{e}^z)} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$;

(iii) $\mathrm{e}^z \neq 0$;

(iv) $\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$.

Exemple 4.68. Résolvons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E) : \mathrm{e}^z = 1 + i.$$

Notons $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et écrivons $1 + i$ sous forme trigonométrique :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}.$$

Donc :

$$\mathrm{e}^z = 1 + i \Leftrightarrow \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{ib} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \ln(\sqrt{2}) \\ b \equiv \pi/4\,[2\pi] \end{cases}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est donné par :

$$S = \left\{ \frac{\ln(2)}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

40 Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{C}$ de l'équation

$$\mathrm{e}^z + \frac{1}{\mathrm{e}^z} = 0.$$

Attention. La fonction ln n'est pas définie sur $\mathbb{C}$. On ne peut donc **pas écrire** :

$$\mathrm{e}^z = 1 + i \iff z = \ln(1 + i).$$

Proposition 4.69

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = z' + 2ik\pi.$$

Démonstration. Exercice. □

Compétences à acquérir dans ce chapitre

Voici une liste des compétences principales attendues pour ce chapitre. N'hésitez pas à solliciter vos enseignants de TD pour vous proposer des exercices portant sur les compétences vous posant le plus de problème.

- Déterminer la monotonie éventuelle d'une suite.
- Étudier une suite arithmétique, géométrique ou arithmético-géométrique.
- Maîtriser les opérations sur les limites.
- Appliquer le théorème de comparaison.
- Appliquer le théorème de la limite monotone.
- Appliquer le théorème des gendarmes.
- Démontrer que deux suites sont adjacentes.
- Étudier la convergence d'une suite à partir des limites de sous-suites.
- Appliquer le théorème des croissances comparées.
- Maîtriser les opérations sur les suites équivalentes.

Plusieurs résultats portant sur les suites se démontrent par récurrence. Il est donc impératif de bien maîtriser le raisonnement par récurrence pour aborder sereinement ce chapitre.

I Introduction

I.1 Premières définitions

Définition 5.1. Une **suite numérique** est une application $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. On note indifféremment $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_n$. On dit que u_n est le **terme général** de la suite. Lorsque la suite $(u_n)_n$ ne prend que des valeurs réelles, on dit que $(u_n)_n$ est une suite **réelle** (ou suite **de nombres réels**).

Remarque 5.2. Il se peut qu'une suite ne soit définie qu'à partir d'un certain rang n_0. On note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Pour simplifier, on supposera dans la suite que $n_0 = 0$ ou parfois que $n_0 = 1$.

Exemple 5.3. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est la suite dont les termes successifs sont $1, -1, 1, -1, \ldots$

Définition 5.4. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est **majorée** si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$$

Remarque 5.5. Attention à l'ordre des quantificateurs ! Le réel M doit majorer tous les éléments de la suite.

41 Montrer que toute suite réelle $(u_n)_n$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R},\ u_n \leqslant M.$$

Définition 5.6. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est **minorée** si :

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n.$$

Définition 5.7. Une suite réelle est dite **bornée** si elle est majorée et minorée.

42 Montrer qu'une suite $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M.$$

Exemple 5.8. La suite de terme général $u_n = n$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée.

Définition 5.9. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est **croissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}.$$

On définit de manière similaire ce qu'est une suite **décroissante**, **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Exemple 5.10. La suite de terme général $u_n = 2n$ est strictement croissante.

Exemple 5.11. Une suite dont les premiers termes sont :

$$0, 1, 3, -1, 4, -6,$$

n'est ni croissante ni décroissante.

43 Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Écrire les négations des deux assertions «$(u_n)_n$ est croissante» et «$(u_n)_n$ est décroissante» puis montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n n$ n'est ni croissante ni décroissante.

I.2 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 5.12. On appelle suite **arithmétique** toute suite dont le terme général vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r,$$

où $r \in \mathbb{C}$ est fixé (il ne dépend pas de n) et est appelé **raison** de la suite.

Proposition 5.13

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

Démonstration. Récurrence immédiate : exercice. ☐

44 Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme des n premiers termes de la suite.

Définition 5.14. On appelle suite **géométrique** toute suite dont le terme général vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n,$$

où $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ est fixé (il ne dépend pas de n) et appelé **raison** de la suite.

Proposition 5.15

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \, q^n.$$

Démonstration. C'est une récurrence immédiate : exercice. □

45 Soient $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme des n premiers termes de la suite.

Définition 5.16. On appelle suite **arithmético-géométrique** de raisons $q \neq 1$ et r toute suite u vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n + r.$$

46 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

Déterminer le terme général de $(u_n)_n$. Indication : on pourra chercher α de sorte que la suite de terme général $v_n = u_n - \alpha$ soit géométrique. On déterminera alors v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

Remarque 5.17. On ne demande pas de connaître la formule donnant le terme général d'une suite arithmético-géométrique de paramètres q et r. En revanche, il faut être capable de reproduire le raisonnement effectué dans l'exercice précédent sur un exemple concret.
Pour s'entraîner, on pourra essayer de reproduire la méthode de l'exercice précédent dans le cas général d'une suite arithmético-géométrique de raisons q et r pour trouver l'expression du terme général en fonction des paramètres q et r.

II Convergence d'une suite réelle

II.1 Limite finie

Définition 5.18. On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

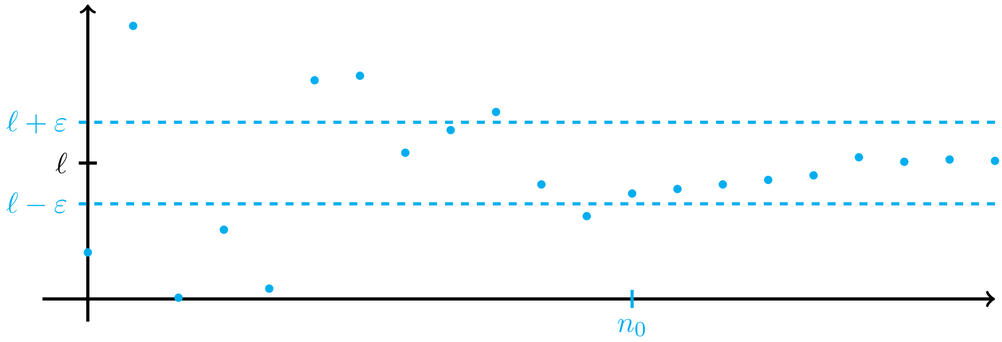
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0, \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. On note :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell, \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell,$$

ou encore simplement $u_n \to \ell$ ou $\lim u_n = \ell$.

Illustration 5.19.



Remarque 5.20. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers ℓ. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon/2.$$

En effet, il suffit pour $\varepsilon > 0$ fixé d'appliquer la définition avec le réel $\varepsilon' = \varepsilon/2$.

47 Montrer à l'aide de la définition que la suite constante $u_n = 2$ est convergente.

48 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite de terme général $1/n$. Montrer que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 5.21 (unicité de la limite)

Si une suite réelle converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Proposition 5.22

Toute suite réelle convergente est bornée.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

II.2 Limites infinies

Définition 5.23. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ **tend vers** $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant M.$$

Autrement dit, quel que soit le réel M, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont plus grands que M.

Exemple 5.24. La suite de terme général $u_n = \ln(n+1)$ tend vers $+\infty$.

Définition 5.25. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ **tend vers** $-\infty$ si :

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant m.$$

Propriété 5.26. Si la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors $(u_n)_n$ est minorée et non majorée.

Démonstration. Exercice. □

Propriété 5.27. Une suite tendant vers $-\infty$ est majorée et non minorée.

Démonstration. Exercice. □

II.3 Opérations sur les limites

Proposition 5.28

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors, $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Proposition 5.29

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle convergente de limite ℓ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha\ell$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Proposition 5.30

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors, $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Proposition 5.31

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Si $\ell_2 \neq 0$, alors, $u_n/v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1/\ell_2$.

Remarque 5.32. Si $v_n \to \ell_2 \neq 0$, alors $(v_n)_n$ est non nulle à partir d'un certain rang.

Démonstration. Exercice. □

II.4 Limites et relations d'ordre

Théorème 5.33 (de comparaison)

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que pour n suffisamment grand on ait $u_n \leqslant v_n$.

(i) Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

(ii) Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.

(iii) Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Remarque 5.34. Si $u_n < v_n$ (inégalité stricte), alors, il se peut que les suites aient la même limite.

49 Déterminer deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ayant la même limite telles que pour tout n, $u_n < v_n$.

Théorème 5.35

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante et majorée. Alors, $(u_n)_n$ converge.

Démonstration. Admis. □

50 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ k! \geqslant 2^{k-1}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
3. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Corollaire 5.36

Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante et minorée. Alors, $(u_n)_n$ converge.

Démonstration. Il suffit de considérer la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = -u_n$ puis d'appliquer le théorème précédent. □

II.5 Théorème des gendarmes

Théorème 5.37 (des gendarmes)

Soient $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(u_n)_n$ trois suites réelles vérifiant à partir d'un certain rang :

(i) $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$,

(ii) $\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \ell$.

Alors, $u_n \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Corollaire 5.38

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles et ℓ un nombre réel tels que

(i) à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$,

(ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Alors, $u_n \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.

51 Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \frac{\sin(n)}{n}.$$

II.6 Suites adjacentes

Définition 5.39. On dit que deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont **adjacentes** lorsque :

(i) l'une est croissante,

(ii) l'autre est décroissante,

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 5.40

Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Exemple 5.41. Considérons les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{2}{v_{n+1}} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Remarquons que ces suites sont bien définies : il est clair qu'elles sont strictement positives (récurrence immédiate). De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{4}{u_n + v_n} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(v_n + u_n)} \geqslant 0, \tag{5.1}$$

où la dernière égalité provient de $u_n v_n = 2$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant u_n.$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0.$$

Donc, la suite $(v_n)_n$ est décroissante. On en déduit que $(u_n)_n$ est croissante (car $u_n = 2/v_n$). De plus, l'équation (5.1) peut aussi s'écrire :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_n - u_n}{v_n + u_n} \cdot (v_n - u_n). \tag{5.2}$$

Or,

$$-u_n \leqslant u_n \Rightarrow v_n - u_n \leqslant v_n + u_n \Rightarrow \frac{v_n - u_n}{v_n + u_n} \leqslant 1.$$

De plus, $v_n - u_n \geqslant 0$. On en déduit en reprenant l'équation 5.2 que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

Ainsi, par une récurrence simple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (v_n - u_n) \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0) = \frac{1}{2^n}.$$

La suite $(v_n - u_n)_n$ admet donc pour limite zéro en l'infini. De plus, $(u_n)_n$ étant croissante et $(v_n)_n$ décroissante, les suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite ℓ. Enfin, la relation :

$$u_{n+1} = \frac{2}{v_{n+1}}$$

implique que :

$$\ell = \frac{2}{\ell}.$$

On en déduit que $\ell = \pm\sqrt{2}$ et donc que $\ell = \sqrt{2}$, les suites étant à termes positifs.

52 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?

II.7 Suites extraites

Définition 5.42. Soit $(u_n)_n$ une suite. Une **suite extraite** (ou **sous-suite**) de $(u_n)_n$ est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple 5.43. La suite dont les termes sont donnés par :

$$u_0, u_1, u_3, u_4, u_6, u_7, u_9, u_{10}, \ldots$$

est une suite extraite de $(u_n)_n$.

Exemple 5.44. Soit :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & 2n. \end{array}$$

La suite extraite $(u_{2n})_n$ de $(u_n)_n$ est la suite formée des termes d'indices pairs de $(u_n)_n$.

Proposition 5.45

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle convergente. Alors, toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers la même limite.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Remarque 5.46. Si $(u_n)_n$ admet deux sous-suites qui convergent vers deux limites distinctes, alors $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

53 À l'aide de la remarque précédente, montrer que la suite $(u_n)_n$ définie ci-dessous n'est pas convergente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Indication : on pourra considérer les suites extraites (u_{4n}) et (u_{4n+1}).

Remarque 5.47. Il se peut que deux sous-suites de $(u_n)_n$ soient convergentes vers la même limite sans que $(u_n)_n$ ne le soit.

Exemple 5.48. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} n & \text{si } 3|n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $(u_{3n+1})_n$ et $(u_{3n+2})_n$ convergent vers 0. Pourtant $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Théorème 5.49

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers une même limite ℓ. Alors, $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Remarque 5.50. On peut montrer de même que si $(u_{3n})_n$, $(u_{3n+1})_n$ et $(u_{3n+2})_n$ convergent vers la même limite ℓ, alors $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

III Comparaison de suites

III.1 Définitions

Définition 5.51. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.

(i) On dit que $(u_n)_n$ est **négligeable** devant $(v_n)_n$ au voisinage de $+\infty$ et on écrit $u_n =_\infty o(v_n)$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ telle que, à partir d'un certain rang :

$$u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

(ii) On dit que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont **équivalentes** au voisinage de $+\infty$ et on écrit $u_n \sim_\infty v_n$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ telle que, à partir d'un certain rang :

$$u_n = (1+\varepsilon_n)v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Proposition 5.52

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites. Si la suite $(v_n)_n$ est non nulle à partir d'un certain rang, alors :

(i) $u_n =_\infty o(v_n) \Leftrightarrow u_n/v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,;$

(ii) $u_n \sim_\infty v_n \Leftrightarrow u_n/v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Démonstration. Exercice. □

Exemples 5.53. $\sqrt{n} =_\infty o(n)$, $\ln(1+1/n) \sim_\infty 1/n$, $n\cos(n) =_\infty o(n^2)$.

Théorème 5.54

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ quatre suites non nulles à partir d'un certain rang. Si $a_n \sim_\infty b_n$ et que $u_n \sim_\infty v_n$, alors :

$$a_n u_n \sim_\infty b_n v_n \quad \text{et} \quad \frac{a_n}{u_n} \sim_\infty \frac{b_n}{v_n}.$$

Démonstration. Admis. □

Attention. Ne jamais additionner ou composer des équivalents.

Exemple 5.55. On sait que :

$$n+1 \sim_\infty n.$$

Pourtant :

$$(n+1)-n \not\sim_\infty n-n = 0.$$

Attention. On n'est jamais équivalent à zéro, sauf quand on est complètement nul (i.e. $u_n \sim_\infty 0$ ssi $(u_n)_n$ est nulle à partir d'un certain rang).

III.2 Croissances comparées

Théorème 5.56

Soient $\alpha > 0$ et $a > 1$. Alors :

(i) $\dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,;$ (ii) $\dfrac{n^\alpha}{a^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,;$ (iii) $\dfrac{a^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Démonstration. Les deux premiers points ont été démontrés au lycée. Nous démontrerons le troisième en classe. □

Remarque 5.57. Pour simplifier, on écrit ces résultats de croissances comparées de la façon suivante :

$$\ln(n) \ll n \ll n^2 \ll \mathrm{e}^n \ll n!.$$

Remarque 5.58. En pratique, pour lever une indétermination, on gardera le terme «le plus fort» (comprendre : celui qui converge le plus vite).

54 Déterminer des équivalents simples puis les limites éventuelles des suites définies par :

$$u_n = \frac{3^n + 1}{5n - n^2}, \quad v_n = \frac{2^n + 3^n}{n! + n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

IV Suites et fonctions

Propriété 5.59. Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n).$$

Si f est croissante (resp. décroissante), alors $(u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante).

Démonstration. Exercice. □

Propriété 5.60

Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Si $u_0 \leqslant u_1$ (resp. $u_0 \geqslant u_1$), alors $(u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante).

Démonstration. C'est une simple récurrence : exercice. □

55 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que la propriété ci-dessous est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 2.$$

2. Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

V Convergence d'une suite complexe

Définition 5.61. Une suite complexe $(u_n)_n$ est dite **bornée** s'il existe un nombre réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leqslant M.$$

56 En utilisant le résultat de l'exercice 42, montrer qu'une suite complexe $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si les deux suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_n$ sont bornées.

Définition 5.62. On dit qu'une suite de nombres complexes $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans le disque de centre ℓ et de rayon ε. On note :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell, \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell, \quad \text{ou} \quad u_n \to \ell, \quad \text{ou} \quad \lim u_n = \ell.$$

Proposition 5.63

Une suite complexe $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si les suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_n$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$.

Démonstration. Exercice. □

Remarque 5.64. Ce résultat permet de déduire des propriétés vues sur les suites réelles que les propositions 5.21, 5.22, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31 et 5.45 ainsi que le théorème 5.49 sont encore vrais pour les suites de nombres complexes. En particulier, la somme, le produit et le quotient (lorsqu'il est bien défini) de deux suites complexes convergentes sont des suites convergentes.

Compétences à acquérir dans ce chapitre

Voici une liste des compétences principales attendues pour ce chapitre. N'hésitez pas à solliciter vos enseignants de TD pour vous proposer des exercices portant sur les compétences vous posant le plus de problème.

- Se rappeler des définitions des différentes limites en un point et en l'infini.
- Étudier l'existence d'une asymptote et sa position locale par rapport à la courbe.
- Étudier la limite en un point à l'aide des limites à droite et à gauche.
- Appliquer le théorème de la caractérisation séquentielle de la limite/de la continuité.
- Maîtriser les opérations sur les limites.
- Appliquer le théorème de comparaison.
- Appliquer le théorème des gendarmes.
- Maîtriser les opérations sur les fonctions équivalentes.
- Mémoriser les équivalents des fonctions usuelles au voisinage de 0.
- Mémoriser et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
- Mémoriser et appliquer le théorème de la bijection.

I Limite d'une fonction

I.1 Limite en l'infini

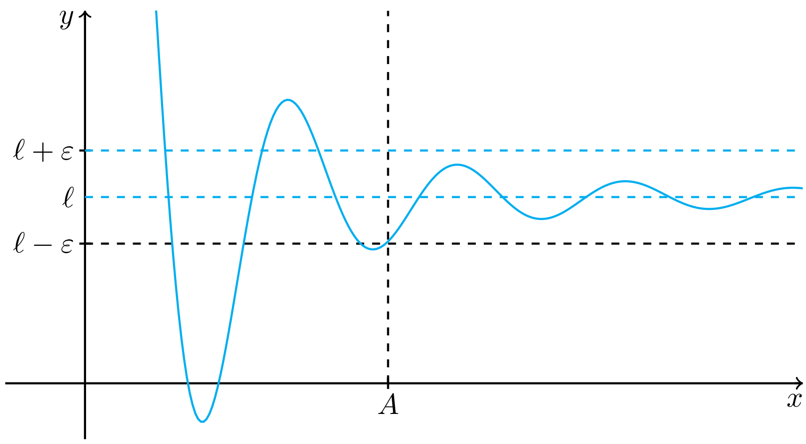
Définition 6.1. Soient I un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}$ est fixé) et $f \colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f **tend vers** $\ell \in \mathbb{R}$ **en** $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in I,\ \forall x \geqslant A, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{\to} \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = \ell.$$

Illustration 6.2. Quelle que soit la précision ε, les $f(x)$ sont tous proches de la limite à ε près lorsque x est suffisamment grand.



Exemple 6.3. Considérons :

$$\begin{array}{rccc} f & : & [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\cos(x)}{x}. \end{array}$$

Alors, f tend vers 0 en $+\infty$.

57 En s'inspirant de la définition précédente, écrire la définition de «f tend vers ℓ en $-\infty$».

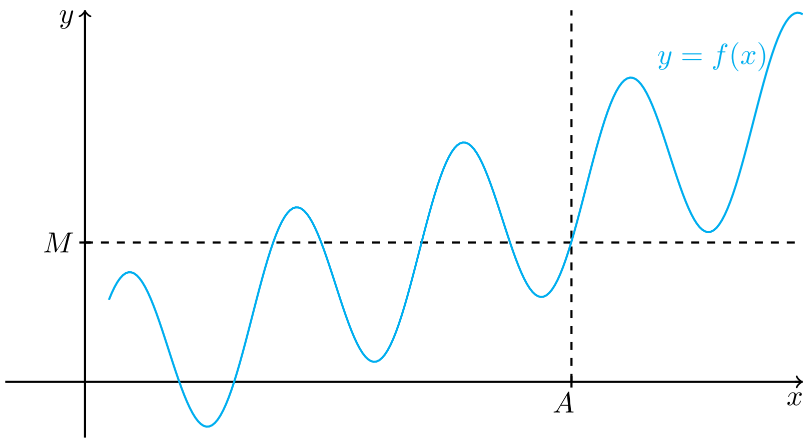
Définition 6.4. Soient I un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}$ est fixé) et $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f **tend vers** $+\infty$ **en** $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in I,\ \forall x \geqslant A,\ \ f(x) \geqslant M.$$

On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{ou} \quad f \underset{+\infty}{\to} +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Illustration 6.5. Quel que soit le réel M, les $f(x)$ sont tous plus grands que M lorsque x est suffisamment grand.



Exemple 6.6. Considérons :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x. \end{array}$$

Alors, f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

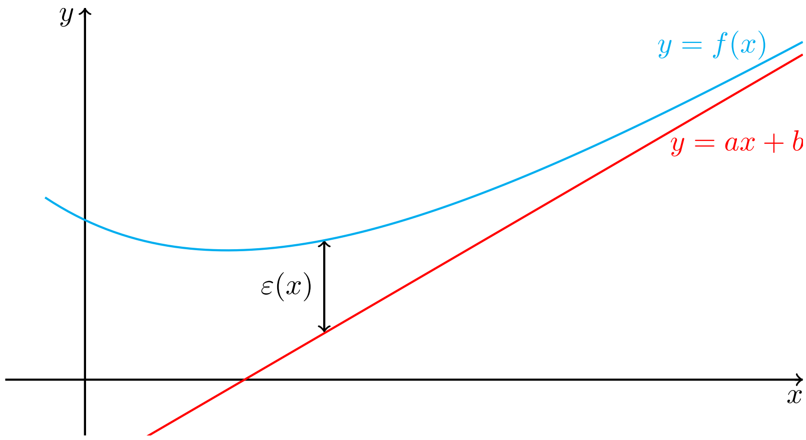
58 En s'inspirant de la définition précédente, écrire la définition de «f tend vers $-\infty$ en $-\infty$».

Définition 6.7. Soient I un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}$ est fixé) et $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que la courbe représentative de f **admet une asymptote oblique en** $+\infty$ (resp. $-\infty$) d'équation $y = ax + b$ s'il existe une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(x) = ax + b + \varepsilon(x), \\ \varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \big(\text{resp. } \varepsilon(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0\big), \end{cases}$$

Illustration 6.8. Autrement dit, la courbe représentative de f se rapproche de la droite d'équation $y = ax + b$ lorsque x tend vers l'infini :

$$f(x) - (ax + b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$



I.2 Limite en un point

I.2.1 Premières définitions

Définition 6.9. Soient I une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dira que f est définie **au voisinage** de $x_0 \in \mathbb{R}$ si I contient un intervalle de la forme :

$$[a, x_0[\quad \text{ou} \quad]x_0, b] \quad \text{ou} \quad [a, x_0[\cup]x_0, b], \quad \text{ou encore} \quad [a, b] \quad \text{avec } x_0 \in [a, b].$$

Exemple 6.10. Les deux fonctions ci-dessous sont définies au voisinage de 0.

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) \end{array} \qquad\qquad g \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x} \end{array}$$

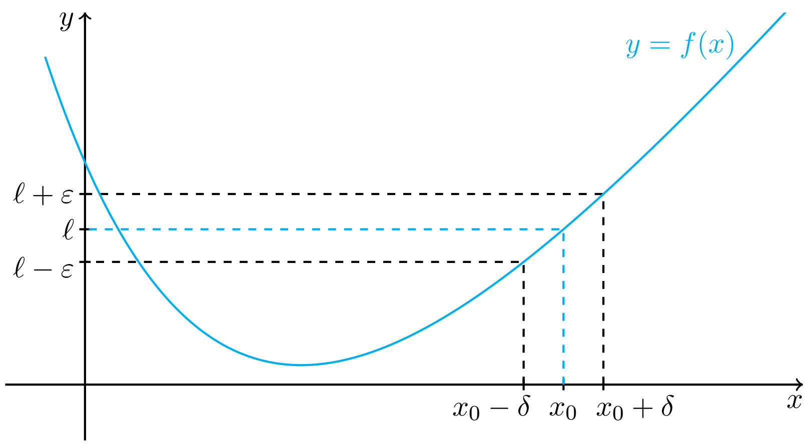
Définition 6.11. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. On dit que f **admet pour limite** $\ell \in \mathbb{R}$ **en** x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad \Big(|x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big).$$

On note alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \quad \text{ou} \quad f \underset{x_0}{\to} \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = \ell.$$

Illustration 6.12. Quelle que soit la précision ε, pour x suffisamment proche de x_0, $f(x)$ est proche de ℓ à ε près.



Remarque 6.13. La fonction f n'a pas besoin d'être définie en x_0 pour y admettre une limite. Si f est définie en x_0 et que f admet une limite en x_0, alors, cette limite ne peut être que $f(x_0)$.

Exemple 6.14. Soit f la fonction définie par :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x}. \end{array}$$

Alors, f tend vers 1 en 0. En effet :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

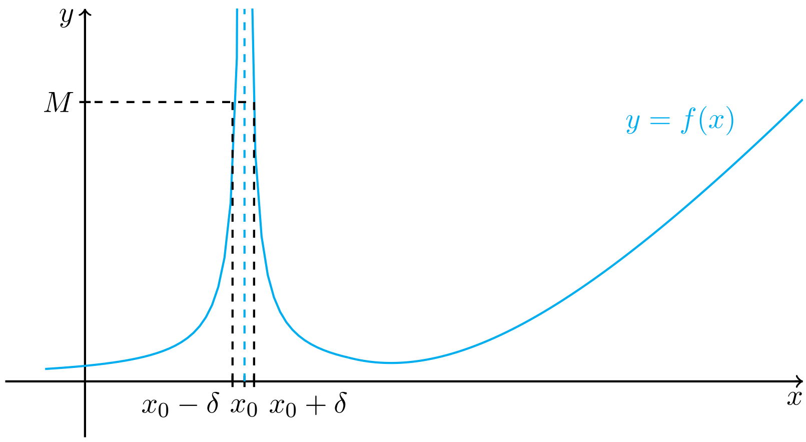
Définition 6.15. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f \colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. On dit que f **tend vers** $+\infty$ **en** x_0 si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad \Big(|x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \geqslant M\Big).$$

On note alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{ou} \quad f \underset{x_0}{\to} +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = +\infty.$$

Illustration 6.16. Quel que soit le réel M, $f(x)$ dépasse M pour tout x suffisamment proche de x_0.



Proposition 6.17 (unicité de la limite)

Si une fonction admet une limite en un point (ou en l'infini), alors cette limite est unique.

Démonstration. C'est la même démonstration que pour les suites. □

I.2.2 Limites à droite et à gauche

Définition 6.18. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f \colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. On dit que f admet une **limite à droite** en x_0 si la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ admet une limite ℓ (éventuellement infinie) en x_0. On note alors :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad f \underset{x_0^+}{\to} \ell.$$

59 En s'inspirant de la définition précédente, écrire ce que signifie avoir une **limite à gauche** en un point pour une fonction.

Exemple 6.19. Considérons la fonction :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

Alors :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Proposition 6.20

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. Si x_0 n'est pas une extrémité de I, alors f admet pour limite ℓ (éventuellement infinie) en x_0 ssi f admet ℓ pour limites à droite et à gauche en x_0.

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \iff \begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} \ell, \\ f(x) \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} \ell. \end{cases}$$

Exemple 6.21. Considérons la fonction :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \lfloor x \rfloor. \end{array}$$

Alors, f n'a pas de limite en 0 car :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -1.$$

Définition 6.22. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. On dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en x_0 si :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

II Carctérisation séquentielle de la limite

Notation 6.23. Soit I un ensemble. On note $I^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans I.

Théorème 6.24 (caractérisation séquentielle de la limite)

Soient $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{+\infty; -\infty\}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty; -\infty\}$. Alors, f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si :

$$\forall (u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, \quad \left(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 \implies f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \right).$$

Démonstration. Nous la ferons en partie en classe. □

Remarque 6.25. En général, on utilise ce théorème pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point (ou en $\pm\infty$).

60 Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}.$$

Démontrer que f n'admet pas de limite en 0.

III Opérations sur les limites

III.1 Opérations algébriques

Les résultats vus pour les suites s'appliquent aussi aux fonctions (sommes, produits, quotients). Les démonstrations sont similaires et ne seront donc pas présentées dans ce chapitre.

Proposition 6.26

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un élément ou une extrémité de I.

(i) Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et que $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell' \in \mathbb{R}$, alors :
- $f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell + \ell'$,
- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \lambda\ell$,
- $f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell\ell'$,
- si, de plus, g ne s'annule pas sur I et que $\ell' \neq 0$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell'}$.

(ii) Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.

(iii) Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ et que f est à valeurs dans $]0; +\infty[$ (reps. $]-\infty; 0[$), alors : $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$).

III.2 Limites et relations d'ordre

Définition 6.27. Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et x_0 un élément ou une extrémité de I. On dira qu'une propriété portant sur f est vraie **au voisinage du point** x_0 s'il existe un intervalle ouvert J_{x_0} de centre x_0 tel que la propriété soit vraie sur $J_{x_0} \cap I$.

Remarque 6.28. Cela signifie que cette propriété doit être vraie pour tout x suffisamment proche de x_0.

Définition 6.29. Soit $f\colon [z, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dira qu'une propriété portant sur f est vraie **au voisinage de l'infini** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que cette propriété soit vraie pour tout $x \geqslant M$.

Théorème 6.30 (de comparaison)

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un élément ou une extrémité de I. On suppose que, au voisinage de x_0, $f \leqslant g$.

(i) Si f et g admettent des limites finies en x_0, alors $\lim\limits_{x_0} f \leqslant \lim\limits_{x_0} g$;

(ii) Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$;

(iii) Si $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$.

Démonstration. C'est la même que pour les suites. □

Théorème 6.31 (des gendarmes)

Soient f, u et v trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un élément ou une extrémité de I. Si :

(i) au voisinage de x_0, $\;u \leqslant f \leqslant v$,

(ii) $\lim\limits_{x_0} u = \lim\limits_{x_0} v = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$,

alors $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

Démonstration. C'est la même que pour les suites. □

Corollaire 6.32

Soient f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un élément ou une extrémité de I. S'il existe une fonction ε de I dans $\mathbb{R}$ et un réel ℓ tels que :

(i) pour tout x au voisinage de x_0, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon(x)$,

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$,

alors, $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

III.3 Limites et fonctions composées

Théorème 6.33

Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément ou une extrémité de I. Soient $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$. Soient encore $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$. Alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0, \\ \lim\limits_{y \to y_0} g(y) = \ell. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell.$$

Démonstration. Nous la ferons en partie en classe. □

IV Comparaison locale de fonctions

Dans tout ce qui suit, f, g et h désignent trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un élément ou une extrémité de I.

IV.1 Négligeabilité

Définition 6.34. On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de x_0 et on note $f =_{x_0} o(g)$ s'il existe une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0, \\ \forall x \in I,\ f(x) = \varepsilon(x) g(x). \end{cases}$$

On écrira encore «au voisinage de x_0, $f = o(g)$» ou «en x_0, $f = o(g)$».

Proposition 6.35

Si g ne s'annule pas sur $I \backslash \{x_0\}$ alors :

$$f =_{x_0} o(g) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. Évident. ☐

Proposition 6.36

Au voisinage de x_0, si f est négligeable devant g et que g est négligeable devant h alors f est négligeable devant h.

Exemples 6.37. Entre autres :
- Au voisinage de $+\infty$, $x^7 = o(\mathrm{e}^x)$.
- En 0, $\ln(x) = o(1/x)$.
- $f =_a o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_a f = 0$.

Théorème 6.38 (croissances comparées)

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors,

(i) $\dfrac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; (ii) $\dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\beta x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

IV.2 Équivalence

Définition 6.39. On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de x_0 et on note $f \sim_{x_0} g$ s'il existe une fonction $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0, \\ \forall x \in I,\ f(x) = (1 + \varepsilon(x)) g(x). \end{cases}$$

Proposition 6.40

$$f \sim_{x_0} g \iff f - g =_{x_0} o(g).$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 6.41

Si g ne s'annule pas sur $I \backslash \{x_0\}$ alors :

$$f \sim_{x_0} g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1.$$

Démonstration. Immédiat. □

Remarque 6.42. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$. Alors :

(i) Si $f \sim_{x_0} g$ et que $\lim_{x_0} g = \ell$, alors $\lim_{x_0} f = \ell$;

(ii) Si $\ell \in \mathbb{R}^\star$, alors $\left(f \sim_{x_0} \ell \iff \lim_{x_0} f = \ell\right)$.

Proposition 6.43

Au voisinage de x_0 :

(i) $f \sim g$ si et seulement si $g \sim f$;

(ii) Si $f \sim g$ et que $g \sim h$ alors $f \sim h$;

(iii) Si $f \sim g$ et que $h \sim k$ alors $fh \sim gk$;

(iv) Si $f \sim g$ et que f et g ne s'annulent pas au voisinage de x_0 alors $1/f \sim 1/g$.

Démonstration. Admis (similaire à celle vue pour les suites). □

Attention. Comme pour les suites, on ne peut ni additionner ni composer des équivalents.

61 Démontrer que :

1. En $+\infty$, $x^7 + x^2 + \ln(x) \sim x^7$.
2. En 0, $x^2 + x^3 \sim x^2$.

Proposition 6.44

Au voisinage de 0 :

- $\ln(1+x) \sim x$,
- $\sin(x) \sim x$,
- $\cos(x) - 1 \sim -x^2/2$,
- $e^x - 1 \sim x$.

Démonstration. Vue en classe. □

62 Déterminer la limite éventuelle en 0 de : $\dfrac{\sin^3(x)}{x^3 + x^4}$.

63 Déterminer la limite éventuelle en 0 de : $\dfrac{\ln(1+x)}{2x}$.

V Fonctions continues

V.1 Continuité en un point

Définition 6.45. Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est **continue en** x_0 si f admet pour limite $f(x_0)$ en x_0.

Proposition 6.46 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Alors, f est continue en x_0 ssi pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de I qui converge vers x_0, $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$.

Démonstration. Découle de la caractérisation séquentielle de la limite. $\square$

64 Démontrer que la fonction f ci-dessous n'est pas continue en 0.

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

V.2 Continuité globale

Définition 6.47. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en tout point x_0 de I.

Remarque 6.48. Graphiquement, cela signifie qu'on peut tracer le graphe de f sans lever le crayon. Attention cependant à ne pas faire de trait vertical !

Proposition 6.49

Soient f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\lambda f + g$ est continue sur I ;

(ii) fg est continue sur I ;

(iii) si g ne s'annule pas sur I, alors f/g est continue sur I.

Définition 6.50. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ où I est un ensemble de la forme

$$]x_0, b] \quad \text{ou} \quad [a, x_0[\quad \text{ou} \quad [a, x_0[\cup]x_0, b].$$

On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 si f admet une limite finie en x_0.

Exemple 6.51. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x}. \end{array}$$

Alors, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

65 Soit f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} & \text{si } x<0, \\ x+k & \text{si } x>0. \end{cases}$$

Déterminer un réel k tel que f soit prolongeable par continuité en 0 : on commencera par tracer le graphe de f en prenant une valeur de k «au hasard».

V.3 Fonctions continues sur un segment

Théorème 6.52

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est bornée sur $[a,b]$ et y atteint ses bornes.

Démonstration. Admis. □

Remarque 6.53. En terme de quantificateurs, cela signifie que

$$\exists x_1 \in [a,b], \forall x \in [a,b], \quad f(x_1) \leqslant f(x),$$

et que

$$\exists x_2 \in [a,b], \forall x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant f(x_2).$$

Théorème 6.54 (des valeurs intermédiaires)

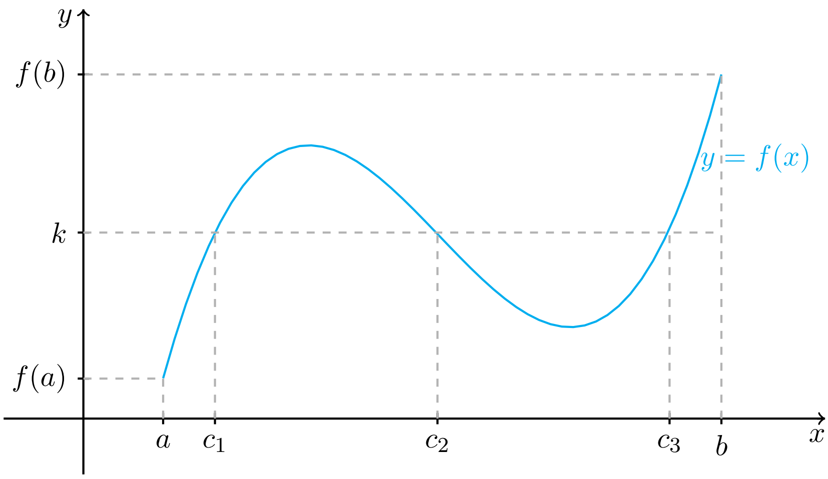
Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors :

$$\exists c \in [a,b], \quad f(c) = k.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Remarque 6.55. Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Illustration 6.56. La fonction f peut prendre plusieurs fois la valeur k sur l'intervalle $[a,b]$.



66 Un marcheur parcourt 10km en 2h. Montrer qu'il existe une période d'une heure pendant laquelle il a parcouru exactement 5km.
Indication : on pourra noter v la vitesse du marcheur et considérer la fonction :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \displaystyle\int_t^{t+1} v(s)\mathrm{d}s. \end{array}$$

V.4 Fonctions monotones

Théorème 6.57 (de la bijection)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors :

(i) f réalise une bijection de I sur $f(I)$;

(ii) f^{-1} est continue et strictement monotone, de même monotonie que f ;

(iii) les bornes de $f(I)$ sont les images par f des bornes de I.

Démonstration. Admis. □

Exemple 6.58. Considérons la fonction :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Alors f est strictement croissante sur $I = [0,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de I dans $J = f(I) = [0,+\infty[$. Sa bijection réciproque est continue de J dans I : c'est la fonction racine carrée.

67 Démontrer que l'équation

$$\ln(2x+1) + \sin(x) = 1$$

admet une unique solution sur l'intervalle $[0,\pi/4]$.
Indication : on pourra étudier la fonction $x \mapsto \ln(2x+1) + \sin(x)$ sur $[0,\pi/4]$.

Proposition 6.59

Lorsque f est bijective, les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Compétences à acquérir dans ce chapitre

Voici une liste des compétences principales attendues pour ce chapitre. N'hésitez pas à solliciter vos enseignants de TD pour vous proposer des exercices portant sur les compétences vous posant le plus de problème.

- Maîtriser les opérations sur les polynômes (somme, produit, dérivée).
- Manipuler les degrés de polynômes en lien avec ces opérations.
- Exploiter le lien entre degré d'un polynôme et nombre de racines.
- Effectuer une division euclidienne de polynômes de petit degré.
- Déterminer le reste dans une division euclidienne de polynômes de degré quelconque.
- Décomposer un polynôme en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.
- Décomposer un polynôme en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$.
- Exploiter les relations entre racines et coefficients d'un polynôme.

I L'ensemble des polynômes

I.1 Premières définitions

Définition 7.1. Un **polynôme** sur $\mathbb{K}$ est une suite de coefficients $(a_k)_k$ de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Pour simplifier, on écrira le polynôme $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n,$$

et on dira que X est **l'indéterminée** du polynôme.

Remarque 7.2. On note parfois aussi $\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ ou plus simplement $\sum a_kX^k$ le polynôme de la définition précédente.

Définition 7.3. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemples 7.4. Entre autres :
- $P = 1 + X - 3X^4$ est un polynôme.
- $P = 0$ est le polynôme nul.

Définition 7.5. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. La **fonction polynomiale** associée à P est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & P(x). \end{array}$$

On peut montrer que la fonction ci-dessus détermine entièrement le polynôme P. C'est pourquoi on identifiera souvent un polynôme à sa fonction polynomiale associée.

Proposition 7.6

Une fonction polynomiale est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Démonstration. Admis. □

Remarque 7.7. Deux polynômes P et Q sont égaux si leurs coefficients sont égaux.

I.2 Opérations sur les polynômes

Définition 7.8. Soient $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit le polynôme $\lambda P + Q$ par :

$$\lambda P + Q = \sum (\lambda a_k + b_k) X^k.$$

Exemple 7.9. Soient :

$$P = 1 + X^2 \quad \text{et} \quad Q = X + X^2 + 3X^3.$$

Alors :

$$P - Q = 1 + X^2 - (X + X^2 + 3X^3) = 1 - X - 3X^3.$$

Définition 7.10. Soient $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme PQ par :

$$PQ = \sum c_k X^k,$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Remarque 7.11. La multiplication polynomiale correspond à la multiplication des fonctions polynomiales associées.

Exemple 7.12. Soient $P = 1 + X$ et $Q = 3X + X^2$, alors :

$$PQ = (1 + X)(3X + X^2) = 3X + X^2 + 3X^2 + X^3 = 3X + 4X^2 + X^3.$$

Remarque 7.13. Étant donné que l'on peut identifier un polynôme avec sa fonction polynomiale, l'addition, la multiplication par un scalaire ainsi que la multiplication de polynômes vérifient les mêmes propriétés que pour les fonctions : associativité, distributivité, commutativité, etc...

I.3 Degré d'un polynôme

Définition 7.14. Le **degré** d'un polynôme non nul $P = \sum a_k X^k$ est le plus petit entier n_0 tel que :

$$\forall n > n_0, \quad a_n = 0.$$

On le note $\deg(P)$.

Remarque 7.15. Soit $P = \sum a_k X^k$ un polynôme non nul.

$$\deg(P) = n \iff \begin{cases} a_n \neq 0 \\ \forall k > n, \ a_k = 0. \end{cases}$$

Définition 7.16. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Exemple 7.17. Soit $P = 1 + 3X^2$, alors $\deg(P) = 2$.

Définition 7.18. Soit $P = \sum a_k X^k$ un polynôme non nul. On appelle **coefficient dominant** de P le coefficient a_n où $n = \deg(P)$.

Exemple 7.19. Si $P = 1 + 2X^9$, alors le coefficient dominant de P est 2.

Définition 7.20. Un polynôme est dit **unitaire** si son coefficient dominant est égal à 1.

Proposition 7.21

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. Alors
- (i) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$;
- (ii) Si $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \deg(Q)$;
- (iii) Si $\deg(P) = \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) \leqslant \deg(Q)$.

Démonstration. Exercice. □

Remarque 7.22. De manière générale, on a toujours : $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Exemple 7.23. Soient $P = 1 + X$ et $Q = 1 - X$, alors :

$$P + Q = 1 + X + 1 - X = 2.$$

Donc, $\deg(P+Q) = 0$ alors que P et Q sont de degré 1.

Exemple 7.24. En cas de doute, pour retrouver le premier point de la proposition, on pourra prendre par exemple

$$P = X^n \quad \text{et} \quad Q = X^m,$$

auquel cas

$$PQ = X^{n+m}.$$

On a bien : $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

68 Soient P, Q et R trois polynômes non nuls tels que :

$$PQ = PR.$$

À l'aide de la proposition 7.21, montrer que $\deg(Q) = \deg(R)$.

II Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

II.1 Définition

Définition 7.25. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que P **divise** Q (ou que Q est un **multiple** de P) si :

$$\exists R \in \mathbb{K}[X], \quad Q = PR.$$

On note alors $P|Q$.

Exemple 7.26. Soit $P = X^3 - X$. Alors :

$$P = X(X^2 - 1) = X(X-1)(X+1).$$

Alors, $X|P$, $(X-1)|P$, $(X^2-1)|P$...

Exemple 7.27. Soient $P = 1 + X$ et $Q = 2 + 2X$ alors :

$$P = \frac{1}{2}Q \quad \text{et} \quad Q = 2P.$$

Ainsi, $P|Q$ et $Q|P$.

Remarque 7.28. Soient P et Q deux polynômes non nuls. Alors :

(i) si $P|Q$, alors $\deg(P) \leqslant \deg(Q)$,

(ii) $P|P$,

(iii) si $P|Q$ et que $Q|P$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $P = \lambda Q$.

II.2 Division euclidienne

Théorème 7.29 (division euclidienne)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec B non nul. Alors :

$$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} A = BQ + R, \\ \deg(R) < \deg(B). \end{cases}$$

Démonstration. L'existence des polynômes Q et R est admise. Nous démontrerons l'unicité en cours. □

69 Effectuer la division euclienne de $X^5 - X^4 + X^3$ par $X^2 + 1$.

II.3 Polynômes irréductibles

Définition 7.30. Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$ si $\deg(P) \geqslant 1$ et que ses seuls diviseurs sont les λ et les λP où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple 7.31. Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

Exemple 7.32. Soit $P = 1+X^2$. Alors P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ puisque :

$$P = (X - i)(X + i).$$

III Polynôme dérivé

Définition 7.33. Soit $P = \sum a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Le **polynôme dérivé** de P est le polynôme P' défini par :

$$P' = \sum_{k \geqslant 1} k a_k X^{k-1}.$$

Exemple 7.34. Soit $P = 4X^4 + 8X^3 - 2X + 1$. Alors :

$$P' = 16X^3 + 24X^2 - 2.$$

Exemple 7.35. Soit $Q = 1 + 2iX - (1 + i)X^2$. Alors :

$$Q' = 2i - (2 + 2i)X.$$

Remarque 7.36. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la notion de dérivée coïncide avec celle vue en analyse pour les fonctions d'une variable réelle.

Proposition 7.37

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(i) $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$;

(ii) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Démonstration. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est une conséquence des propriétés de la dérivation sur $\mathbb{R}$. Ce résultat peut aussi se montrer de manière directe (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). $\square$

Définition 7.38. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On définit par récurrence la **dérivée k-ième** d'un polynôme P, notée $P^{(k)}$, comme étant la dérivée de $P^{(k-1)}$. Par convention, on note $P^{(0)} = P$.

Exemple 7.39. Soit $P = 1 + X^3$. Alors :

$$P' = 3X^2, \quad P'' = 6X \quad \text{et} \quad P^{(3)} = 6.$$

De plus :

$$\forall k \geqslant 4, \quad P^{(k)} = 0.$$

70 Soit P un polynôme de degré n. Montrer que pour tout $k > n$, $P^{(k)} = 0$.

IV Racines d'un polynôme

IV.1 Définition

Définition 7.40. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une **racine** de P (ou un **zéro**) si $P(\alpha) = 0$.

Proposition 7.41

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

(i) α est une racine de P ssi $(X - \alpha)$ divise P ;

(ii) si $\deg(P) = n$ avec $n \geqslant 0$ alors P admet au plus n racines distinctes.

Démonstration. Nous démontrerons le premier point en classe. Le deuxième en est une conséquence immédiate (exercice : par contraposition). $\square$

Corollaire 7.42

Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ alors P s'écrit :

$$P = a_n(X - \alpha_1)\dots(X - \alpha_n),$$

où a_n est le coefficient dominant de P.

71 Soit $P = X^3 + 3X^2 - X - 3$. Montrer que P est divisible par $X - 1$ et effectuer la division euclidienne de P par $X - 1$.
Indication : on pourra calculer $P(1)$.

IV.2 Racines multiples

Définition 7.43. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $p \in \mathbb{N}^\star$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P **d'ordre de multiplicité** p (ou plus simplement **d'ordre** p) si :

$$(X-\alpha)^p | P \quad \text{et} \quad (X-\alpha)^{p+1} \nmid P.$$

Exemple 7.44. Soit $P = X^4 - X^2$. Alors, 0 est racine d'ordre 2 de P. En effet :

$$P = X^2(X^2-1) = X^2(X-1)(X+1).$$

Théorème 7.45

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors, α est une racine de P d'ordre p ssi :

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} P = (X-\alpha)^p Q, \\ Q(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

Démonstration. Admis. □

Corollaire 7.46

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors, α est une racine de P d'ordre p ssi :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(p-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Démonstration. Dans le cas où $P \in \mathbb{R}[X]$, il suffit d'appliquer la proposition précédente puis de se souvenir comment dériver un produit. □

V Factorisation de polynômes

V.1 Polynômes scindés

Définition 7.47. On dit qu'un polynôme P est **scindé** sur $\mathbb{K}[X]$ s'il peut s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda(X-\alpha_1)^{p_1}(X-\alpha_2)^{p_2}\ldots(X-\alpha_n)^{p_n},$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (\alpha_i, p_i) \in \mathbb{K} \times \mathbb{N}^\star.$$

Exemple 7.48. Le polynôme X^2+1 est scindé sur $\mathbb{C}[X]$ car on peut écrire :

$$X^2+1 = (X-i)(X+i).$$

Cependant, comme X^2+1 n'admet pas de racine réelle, il n'existe pas de réels a, α_1 et α_2 tels que :

$$X^2+1 = a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$$

et donc X^2+1 n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

V.2 Relations entre racines et coefficients

Proposition 7.49

Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ un polynôme scindé :

$$P = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\ldots(X - \alpha_n).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\
\sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\
\sum_{i<j<k} \alpha_i\alpha_j\alpha_k = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\
\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}$$

Démonstration. Nous ferons la démonstration de ce résultat dans le cas particulier où $n = 3$ en classe. $\square$

Remarque 7.50. Il ne faut pas retenir ce résultat par cœur. Cependant, il faut être capable de reproduire la démonstration pour des petites valeurs de n ($n \leqslant 4$).

72 Soit $P = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$. On suppose qu'il admet trois racines α, β et γ. Calculer $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
Indication : on pourra montrer au préalable que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$.

V.3 Décomposition en facteurs irréductibles

Proposition 7.51

Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ se décompose en produit de polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstration. Admis. $\square$

Remarque 7.52. Cette décomposition est similaire à la décomposition des entiers en produit de nombres premiers.

V.3.1 Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 7.53 (de d'Alembert)

Tout polynôme sur $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Démonstration. Admis (difficile). $\square$

Remarque 7.54. Cela signifie que l'on peut toujours factoriser un polynôme sur $\mathbb{C}[X]$ en un produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

73 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^5 - 1$.

V.3.2 Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 7.55

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

(i) les polynômes de degré 1 ;

(ii) les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Lemme 7.56. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ une racine de P. Alors, $\overline{\alpha}$ est racine de P.

Démonstration du lemme. Exercice. □

Démonstration de la proposition. Nous la ferons en classe. □

74 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^5 - 1$.

75 Soit $P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$. Démontrer que 1 est racine multiple de P puis en déduire les factorisations de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

76 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme :

$$P = X^3 - 3X^2 + 4X - 2.$$

Indication : on pourra commencer par chercher une racine évidente de P.

Dans tout ce chapitre, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On notera encore f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, et on se placera dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Compétences à acquérir dans ce chapitre

Voici une liste des compétences principales attendues pour ce chapitre. N'hésitez pas à solliciter vos enseignants de TD pour vous proposer des exercices portant sur les compétences vous posant le plus de problème.

- Calculer un taux d'accroissement.
- Déterminer la (non-)dérivabilité d'une fonction en un point à l'aide des dérivées à droite et à gauche.
- Dériver une fonction à l'aide des formules usuelles.
- Étudier les variations d'une fonction à l'aide du signe de sa dérivée.
- Déterminer les extrêma locaux éventuels d'une fonction.
- Appliquer le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis, l'inégalité des accroissements finis.
- Démontrer la dérivabilité en un point à l'aide du théorème de prolongement dérivable.

I Dérivabilité en un point

Définition 8.1. On dit que f est **dérivable** en $a \in I$ si la limite suivante existe et est finie :

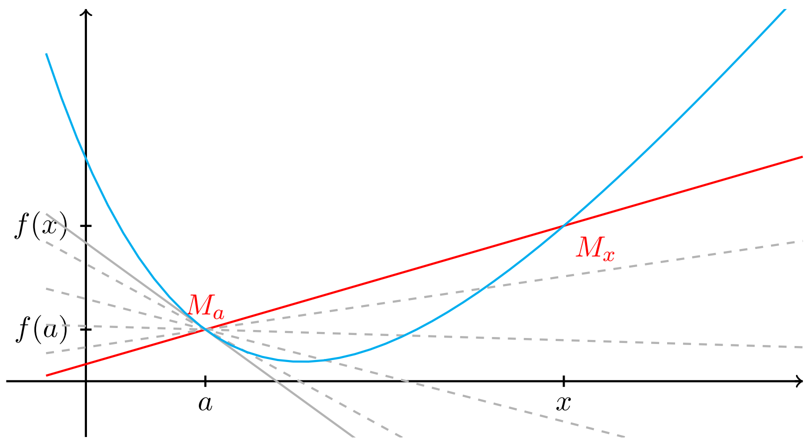
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On appelle alors cette limite **nombre dérivé de** f **en** a et on la note $f'(a)$ (ou parfois $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)(a)$).

Illustration 8.2. Le rapport :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points $M_a = (a, f(a))$ et $M_x = (x, f(x))$.



77 Montrer que les fonctions constantes sont dérivables de dérivées nulles.

78 Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n. \end{array}$$

Montrer que f est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ et que $f'(a) = na^{n-1}$.

Proposition 8.3

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$;

(ii) $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$;

(iii) il existe une fonction ε telle que $f(a+h) = f(a) + h\ell + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Démonstration. Admis. □

Proposition 8.4

Si f est dérivable en a, alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$ est donnée par :

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Proposition 8.5

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration. Exercice : utiliser la proposition 8.3. □

Attention. La réciproque est fausse ! Penser à la fonction valeur absolue par exemple.

Définition 8.6. On dit que f est **dérivable à droite** en a si sa restriction à $I \cap [a, +\infty[$ est dérivable en a. On note alors $f'_d(a)$ le nombre dérivé à droite en a.

Remarque 8.7. Cette définition est équivalente à l'existence de la limite :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Définition 8.8. On définit de même $f'_g(a)$ la **dérivée à gauche** de f en a.

Proposition 8.9

f est dérivable en a ssi elle est dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 8.10. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Elle admet cependant en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. En effet :

$$\forall h > 0, \quad \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{h-0}{h} = 1 \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

De plus :

$$\forall h < 0, \quad \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \underset{h\to 0^-}{\longrightarrow} -1.$$

II Dérivabilité globale

Définition 8.11. On dit que f est **dérivable** si elle est dérivable en tout point de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. On note alors :

$$\begin{array}{rccc} f' & : & \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

II.1 Dérivées usuelles à connaître

Remarque 8.12. Les fonctions usuelles (trigonométriques, polynomiales, fractions rationnelles, exponentielles, logarithmes) sont dérivables sur leurs ensembles de définition. Attention cependant : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

79 Soit :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$

Étudier la dérivabilité éventuelle de f sur son ensemble de définition.

Proposition 8.13

(i) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$. La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^\star$ si $\alpha \in \mathbb{Z} \cap]-\infty; 0[$, sur $]0; +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et : $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

(ii) Les fonctions ln, exp, cos, sin et tan sont dérivables sur leurs ensembles de définition et :
- $\forall x \in]0; +\infty[, \ \ln'(x) = 1/x,$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp'(x) = \exp(x),$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ \cos'(x) = -\sin(x),$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ \sin'(x) = \cos(x),$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}, \ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}.$

Démonstration. Admis. □

II.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 8.14

Soient f et g deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\lambda f + g$ est dérivable et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$,

(ii) fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$,

(iii) si g ne s'annule pas sur I alors f/g est dérivable et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Théorème 8.15

Soient $u\colon I \to J$ et $f\colon J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors, $f \circ u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \quad (f \circ u)'(x) = u'(x) f'(u(x)).$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Remarque 8.16. Ce théorème permet de retrouver les dérivées suivantes :

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u, \quad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}, \quad (\cos(u))' = -u'\sin(u), \quad (u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}, \dots$$

II.3 Fonctions bijectives

Rappelons que $f\colon I \to J$ est bijective si :

$$\forall y \in J,\ \exists! x \in I,\ y = f(x).$$

On note alors $f^{-1}\colon J \to I$ la bijection réciproque de f et :

$$\forall y \in J, \quad \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y,$$
$$\forall x \in I, \quad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x.$$

Théorème 8.17

Supposons que $f\colon I \to J$ est bijective et dérivable de dérivée non nulle. Alors, f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\forall y \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}.$$

Démonstration. La dérivabilité de f^{-1} est admise. Nous démontrerons la formule en classe. □

80 Soit f l'application :

$$f \ : \ ]-\pi/2, \pi/2[\ \to \ \mathbb{R}, \quad x \ \mapsto \ \tan(x).$$

Démontrer que f est bijective puis étudier la dérivabilité de sa bijection réciproque.

III Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

III.1 Extrema locaux d'une fonction dérivable

Définition 8.18. On dit que f admet un **maximum global** en a si :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant f(a).$$

Exemple 8.19. Soit f la fonction définie par :

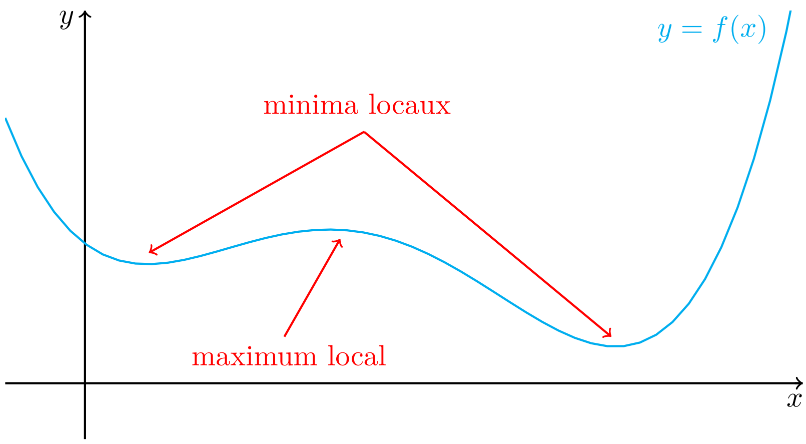
$$f \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2. \end{array}$$

Alors f admet un maximum global en 0.

Définition 8.20. On dit que f admet un **minimum local** en a s'il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) \geqslant f(a).$$

Illustration 8.21. Un extremum local n'est pas forcément global.

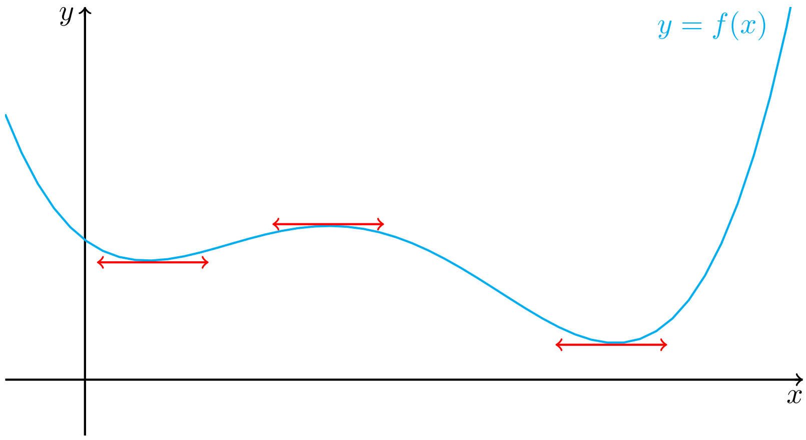


Proposition 8.22

Soit a un point de I qui n'est pas une extrémité de I. Si f est dérivable en a et que f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Illustration 8.23. Les tangentes à la courbe représentative de f aux extrema locaux sont horizontales.



Attention. La réciproque est fausse ! Penser par exemple à la fonction cube en zéro.

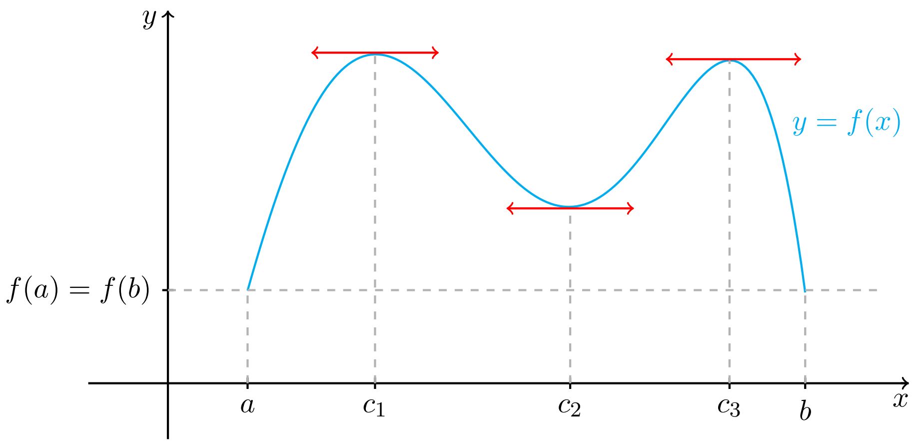
III.2 Accroissements finis

Théorème 8.24 (de Rolle)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$ $(a < b)$. Alors :

$$\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0.$$

Illustration 8.25. Il peut y avoir plusieurs points en lesquels f' s'annule.



Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Théorème 8.26 (des accroissements finis)

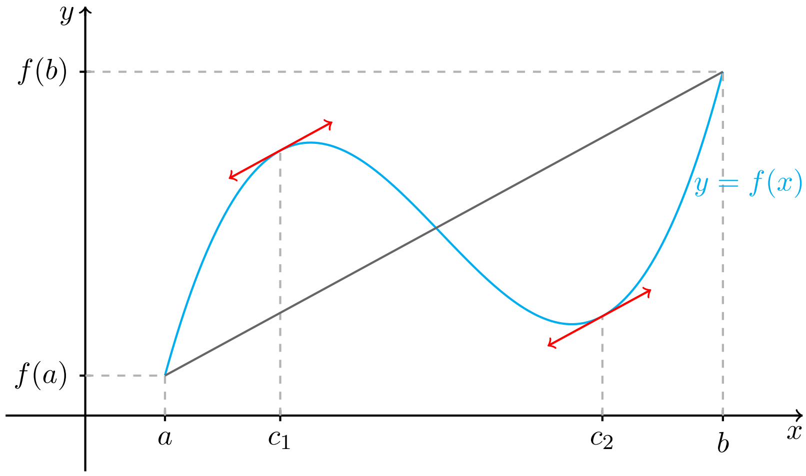
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ $(a < b)$. Alors :

$$\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Illustration 8.27. Le rapport

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

correspond à la pente de la droite reliant les points A et B de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Le théorème des accroissements finis dit qu'il existe au moints un réel c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $(c, f(c))$ soit le même que celui de la droite (AB).



Démonstration. Nous la ferons en classe. □

81 Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(c).$$

Indication : on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction :

$$\begin{array}{rccc} g & : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t. \end{array}$$

82 Un automobiliste met 10 minutes pour aller à son travail, situé à 15kms de chez lui. Montrer qu'il a atteint la vitesse de 90km/h lors de son trajet.

Corollaire 8.28 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$. Si la fonction f' est bornée sur $]a, b[$ par M, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a).$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

IV Variations des fonctions dérivables

Définitions 8.29. On rappelle que f est **croissante** si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad (x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)),$$

et que f est **strictement décroissante** si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad (x < y \Rightarrow f(x) > f(y)).$$

Théorème 8.30

Supposons f dérivable sur I. Alors :

(i) $f' = 0$ si et seulement si f est constante,

(ii) $f' \geqslant 0$ si et seulement si f est croissante sur I,

(iii) si $f' > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

V Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

V.1 Définitions

Définition 8.31. On définit la **dérivée** n**-ième** d'une fonction par récurrence. On dit que f est n fois dérivable sur I si elle est $n-1$ fois dérivable sur I et que sa dérivée $(n-1)$-ème est dérivable. On note alors $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f. On convient que $f^{(0)} = f$.

83 Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

1. Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer f'.
2. Justifier que f' est dérivable sur son ensemble de définition et calculer f''.
3. Faire de même jusqu'à $f^{(4)}$.
4. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ une formule de récurrence pour le calcul de $f^{(n)}$ et démontrer ce résultat.

Définition 8.32. On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^n$ sur I si elle est dérivable n fois et si sa dérivée n-ième est continue. On note $\mathscr{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Définition 8.33. Une fonction est dite **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 8.34. Les fonctions usuelles (trigonométriques, polynomiales, fractions rationnelles, exponentielles, logarithmes) sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

Remarque 8.35. La fonction racine carrée est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ mais pas sur $\mathbb{R}_+$.

V.2 Prolongement dérivable

Théorème 8.36 (de prolongement dérivable)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et que

$$\lim_a f' = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\},$$

alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

Corollaire 8.37

Dans les conditions du théorème précédent :

(i) si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$;

(ii) si $\ell = \pm\infty$ alors la courbe représentative de f présente une demi-tangente verticale au point de coordonnées $(a, f(a))$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

84 Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est dérivable en 0.

Compétences à acquérir dans ce chapitre

Voici une liste des compétences principales attendues pour ce chapitre. N'hésitez pas à solliciter vos enseignants de TD pour vous proposer des exercices portant sur les compétences vous posant le plus de problème.

- Calculer des dérivées impliquant les fonctions arc sinus, arc cosinus et arc tangente.
- Déterminer des valeurs remarquables des fonctions arc sinus, arc cosinus et arc tangente.
- Résoudre des équations faisant intervenir les fonctions arc sinus, arc cosinus et arc tangente.

Pour bien comprendre ce chapitre, il est nécessaire d'avoir intégré la notion de fonction bijective et de bijection réciproque. En outre, un résultat essentiel est le théorème ci-dessous vu au chapitre 8.

Théorème 9.1

Supposons que $f\colon I \to J$ (où I est un intervalle non vide non singulier de $\mathbb{R}$) est bijective et dérivable de dérivée non nulle. Alors, f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\forall y \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}.$$

I La fonction arc sinus

La fonction sinus n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cependant, elle l'est de $[-\pi/2; \pi/2]$ dans $[-1; 1]$.

Définition 9.2. On appelle **arc sinus** et on note arcsin la bijection réciproque de la fonction :

$$\begin{array}{ccc} [-\pi/2; \pi/2] & \to & [-1; 1] \\ x & \mapsto & \sin(x). \end{array}$$

Autrement dit, pour $y \in [-1; 1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique angle compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont le sinus vaut y :

$$\forall y \in [-1; 1], \quad \left(\arcsin(y) = x \iff \begin{cases} y = \sin x \\ x \in [-\pi/2; \pi/2] \end{cases}\right).$$

La fonction sin étant continue et strictement croissante sur $[-\pi/2; \pi/2]$, il en est de même de arcsin. De plus, la dérivée de la fonction sinus ne s'annulant pas sur $]-\pi/2; \pi/2[$, on en déduit que arcsin est dérivable sur $]-1; 1[$, et que :

$$\forall y \in]-1; 1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}.$$

Or, pour tout $y \in]-1; 1[$:

$$\cos^2(\arcsin(y)) = 1 - \sin^2(\arcsin(y)) = 1 - y^2,$$

donc

$$|\cos(\arcsin(y))| = \sqrt{1 - y^2}.$$

Enfin, la fonction cos étant positive sur $]-\pi/2; \pi/2[$, on en déduit que

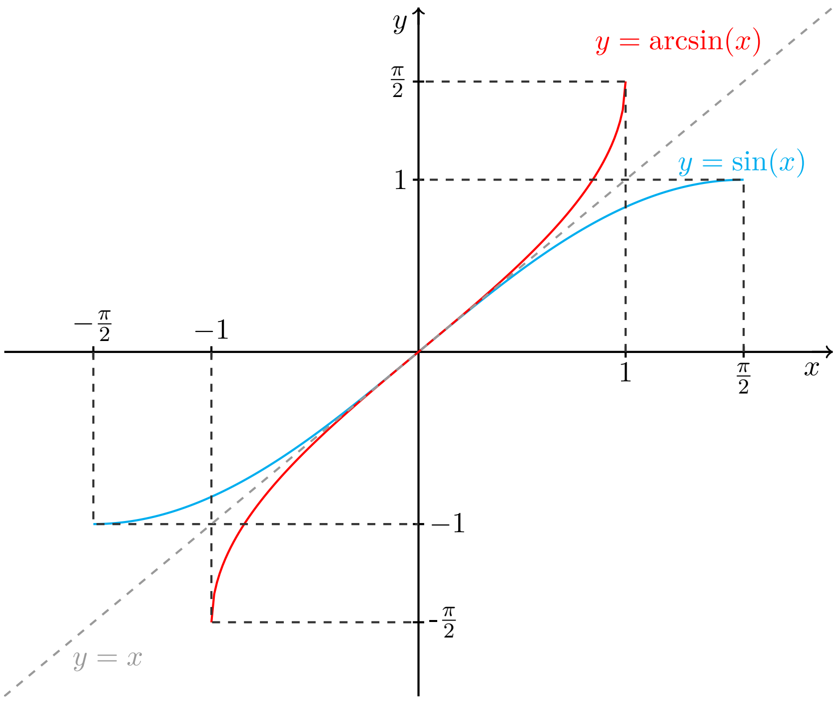
$$\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1 - y^2}.$$

D'où
$$\forall y \in]-1;1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$
La dérivée de arcsin est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$, il en est donc de même pour arcsin.
En $-\pi/2$ et en $\pi/2$, la dérivée de la fonction sinus s'annule : la fonction arcsin présente donc en -1 et en 1 des demi-tangentes verticales.

Proposition 9.3

La fonction arcsin est continue sur $[-1;1]$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et :
$$\forall y \in]-1;1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$
De plus, la courbe représentative de arcsin présente aux points d'abscisses 1 et -1 des demi-tangentes verticales.

Illustration 9.4. Graphe des fonctions sinus et arc sinus.



II La fonction arccos

La fonction cosinus n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cependant, elle l'est de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$.

Définition 9.5. On appelle **arc cosinus** et on note arccos la bijection réciproque de la fonction :
$$\begin{array}{ccc} [0;\pi] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \cos(x). \end{array}$$
Autrement dit, pour $y \in [-1;1]$, $\arccos(y)$ est l'unique angle compris entre 0 et π dont le cosinus vaut y :
$$\forall y \in [-1;1], \quad \left(\arccos(y) = x \iff \begin{cases} y = \cos x \\ x \in [0;\pi] \end{cases} \right).$$

Proposition 9.6

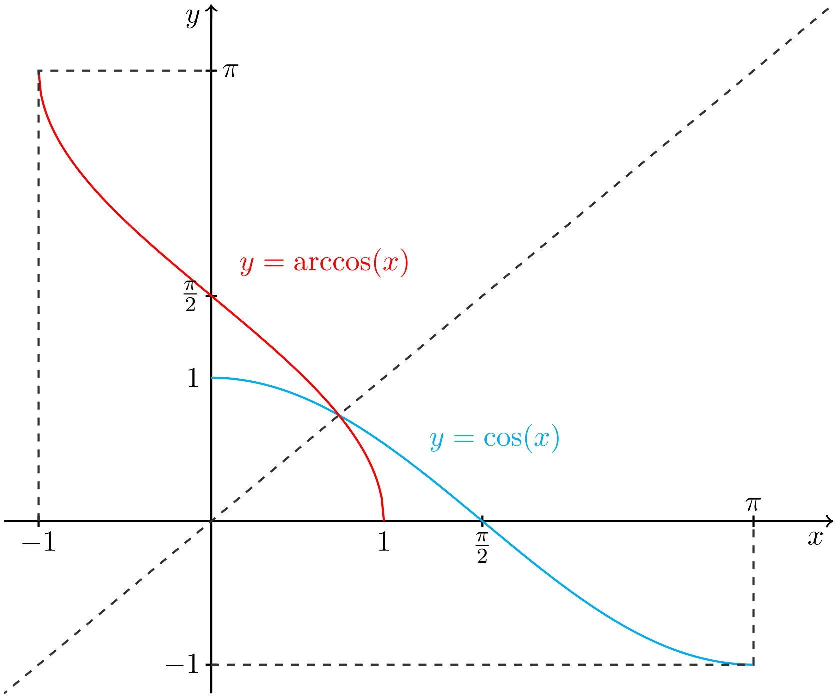
La fonction arccos est continue sur $[-1;1]$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et :

$$\forall y \in]-1;1[, \quad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

De plus, la courbe représentative de arccos présente aux points d'abscisses 1 et -1 des demi-tangentes verticales.

Démonstration. Exercice : s'inspirer de la construction faite pour la fonction arc sinus. □

Illustration 9.7. Graphe des fonctions cos et arccos.



III La fonction arc tangente

Définition 9.8. On appelle arc tangente et on note arctan la bijection réciproque de la fonction :

$$\begin{array}{ccc}]-\pi/2;\pi/2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x). \end{array}$$

Autrement dit, pour $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y)$ est l'unique angle compris strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont la tangente vaut y :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \left(\arctan(y) = x \iff \begin{cases} y = \tan x \\ x \in]-\pi/2;\pi/2[\end{cases} \right).$$

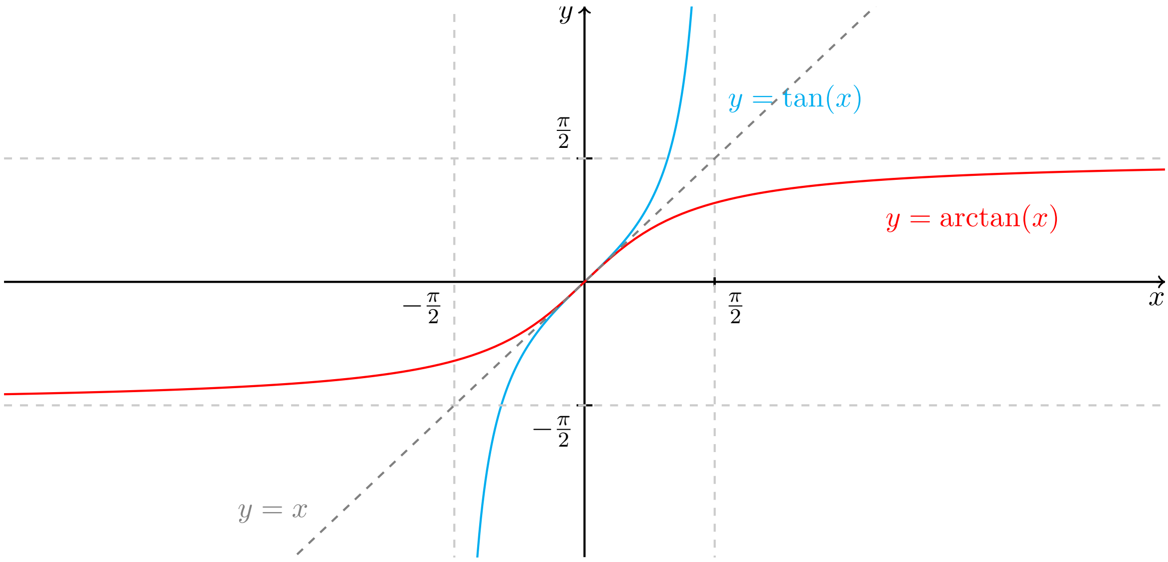
Proposition 9.9

La fonction arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Démonstration. Exercice : s'inspirer de la construction faite pour la fonction arc sinus. □

Illustration 9.10. Graphe des fonctions tan et arctan.



Propriété 9.11

La fonction arctan vérifie :

$$\lim_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}.$$

IV Quelques identités

Exemple 9.12. Démontrons que : $\forall x \in [-1;1], \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$
Considérons la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos(x) + \arcsin(x). \end{array}$$

Alors, f est continue sur $[-1;1]$, dérivable sur $]-1;1[$ et :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

La fonction f est donc constante sur $]-1;1[$. Par continuité, elle l'est aussi sur $[-1;1]$. De plus :

$$f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0,$$

d'où le résultat.

85 Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$: $\arcsin(x) = \arccos(\sqrt{1-x^2})$. En déduire une formule analogue pour $x \in [-1;0]$.