MTA

Algèbre et Analyse

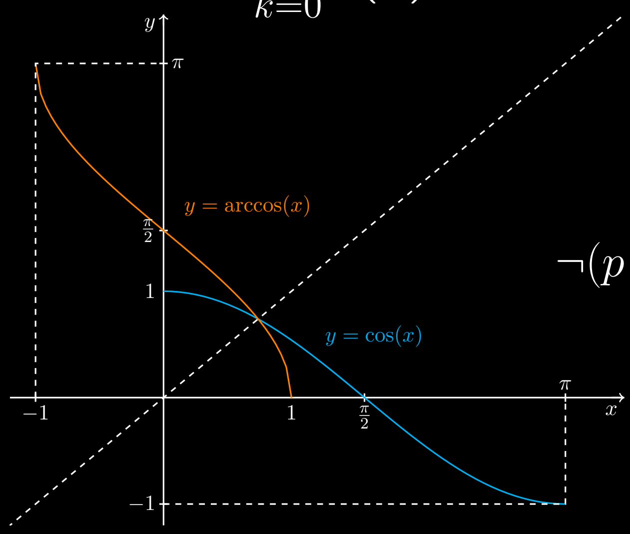
Alexis Flesch

Karine Mauffrey

Automne 2017

Version étudiant-e

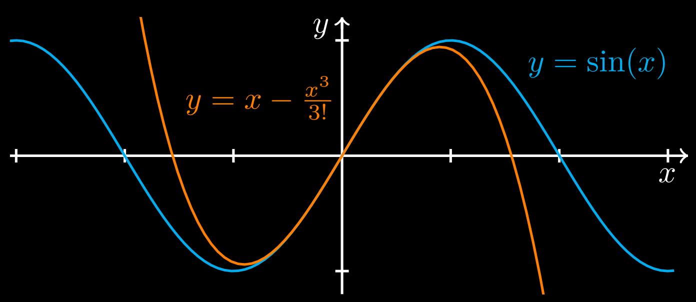
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$



$$\zeta_k = |a|^{1/n} \mathrm{e}^{i(\arg(a)+2k\pi)/n}$$

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Table des matières

Table des matières

Compétences à acquérir dans ce chapitre

Voici une liste des compétences principales attendues pour ce chapitre. N'hésitez pas à solliciter vos enseignants de TD pour vous proposer des exercices portant sur les compétences vous posant le plus de problème.

- Traduire un énoncé à l'aide de quantificateurs.
- Écrire la négation d'une assertion.
- Distinguer les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
- Démontrer un résultat par disjonction de cas.
- Démontrer un résultat par contraposée.
- Démontrer un résultat par l'absurde.
- Démontrer un résultat par analyse-synthèse.
- Démontrer un résultat par récurrence.

I Symboles ensemblistes

I.1 Notions d'ensemble et d'élément

Définition 1.1. Un **ensemble** E est une collection d'objets appelés **éléments**. Si x est un élément de E, alors on note $x \in E$. Sinon, on note $x \notin E$.

Remarque 1.2. On peut se représenter un ensemble par un sac. Ce que contient le sac sont ses éléments.

Exemple 1.3. L'ensemble constitué des entiers 0 et 1 est noté $\{0; 1\}$.

Définition 1.4. Soient E et F deux ensembles. On dit qu'ils sont **égaux** et on note $E = F$ si ils contiennent les mêmes éléments.

Remarque 1.5. Il n'y a pas nécessairement de relation d'ordre dans un ensemble. Il n'y a pas non plus de répétition des éléments. Ainsi : $\{0; 1\} = \{1; 0\}$.

Définition 1.6. On appelle **ensemble vide** et on note $\varnothing$ l'ensemble ne contenant aucun élément (penser à un sac vide).

Remarque 1.7. L'ensemble $\{\varnothing\}$ n'est pas l'ensemble vide : c'est un ensemble constitué d'un seul élément, cet élément étant l'ensemble vide.

Définition 1.8. Soient E et F deux ensembles.
- On appelle **intersection** de E et de F l'ensemble $E \cap F$ dont les éléments sont les éléments communs à E et à F.
- On appelle **réunion** de E et de F l'ensemble $E \cup F$ dont les éléments sont les éléments de E et les éléments de F.

Exemple 1.9. Soient E et F les ensembles définis par $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ et $F = \{0; 2; 4; 6\}$. Alors :
- $E \cap F = \{0; 2; 4\}$,
- $E \cup F = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Exemple 1.10. Notons $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs. On peut remarquer que :
- $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$,
- $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$.

I.2 Inclusion d'ensembles

Définition 1.11. Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F et on note $E \subset F$ si tous les éléments de E sont aussi des éléments de F.

Exemple 1.12. $\{1; 2\} \subset \{1; 2; 3\}$.

Exemple 1.13. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

I.3 Produit cartésien

Définition 1.14. Soient E et F deux ensembles. À partir de $x \in E$ et de $y \in F$, on forme le **couple** (x, y) défini de sorte que : $(x, y) = (x', y')$ uniquement lorsque $x = x'$ et $y = y'$.

Attention. Ici, l'ordre des éléments est important. Par exemple :

$$(1, 2) \neq (2, 1).$$

Définition 1.15. On appelle **produit cartésien** de deux ensembles E et F l'ensemble formé des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$:

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Lorsque $E = F$, on note $E^2 = E \times E$.

Exemple 1.16. Si $E = \{1; 2; 3\}$ et que $F = \{a, b\}$ alors :

$$E \times F = \{(1, a); (1, b); (2, a); (2, b); (3, a); (3, b)\}.$$

Définition 1.17. Soient E_1, E_2, …, E_n des ensembles (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).

- À partir de $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, …, et $x_n \in E_n$, on forme le n-**uplet** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ défini de sorte que : $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ uniquement lorsque $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, … et $x_n = x'_n$.
- On appelle **produit cartésien** des ensembles E_1, E_2, …, E_n l'ensemble formé des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i \in E_i$. On le note $E_1 \times E_2 \times \ldots E_n$:

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\big\}.$$

- Lorsque $E_1 = E_2 = \ldots = E_n$, on note $E^n = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$.

I.4 Notion d'application entre deux ensembles

Définition 1.18. Une **application** (ou **fonction**) d'un ensemble E vers un ensemble F est une «transformation» qui à chaque élément x de E associe un et un seul élément y de F. Cet élément est noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f

Remarque 1.19. Une application est donc la donnée de 3 éléments : l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et les images des éléments de l'ensemble de départ. Les applications ci-dessous sont donc différentes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+, \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$$

II Rudiments de logique

II.1 Assertions

Définition 1.20. Une **assertion** est un énoncé mathématique défini sans ambiguïté et pouvant être vrai (V) ou faux (F).

Exemples 1.21. Les énoncés suivants sont des assertions :

- $\mathscr{P}_1 : 1 \leqslant 2$;
- $\mathscr{P}_2 : 0 < 0$.
- $\mathscr{P}_3$: Le nombre 2^{13} est un entier positif.
- $\mathscr{P}_4$: Si x est un nombre réel négatif, alors sa valeur absolue est égale à x.

Exemple 1.22. La phrase «$f(x) = x^2$ est croissante» n'est pas une assertion car la fonction f est mal définie (suivant son espace de départ, cette phrase peut être vraie ou fausse).

Remarque 1.23. Il arrive qu'une assertion $\mathscr{P}$ dépende d'un paramètre x (ou de plusieurs paramètres $x, y, z, \ldots$), on la notera dans ce cas $\mathscr{P}(x)$ (ou $\mathscr{P}(x, y, z, \ldots)$) au lieu de $\mathscr{P}$. On parle parfois de **prédicat**.

Exemples 1.24. Les énoncés suivants sont des prédicats :

- $\mathscr{P}_1(x) : x \geqslant 0$;
- $\mathscr{P}_2(a, b) : a + b = 0$.

Définition 1.25. Deux assertions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ayant les mêmes valeurs de vérité sont dites **synonymes**. On note $\mathscr{P} \equiv \mathscr{Q}$ lorsque $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont synonymes.

Exemple 1.26. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors les assertions suivantes sont synonymes :

- $\mathscr{P}(n)$: « n est pair » ;
- $\mathscr{Q}(n)$: « $n + 1$ est impair ».

II.2 Négation

Définition 1.27. La **négation** d'une assertion $\mathscr{P}$ est l'assertion prenant la valeur **Fausse** lorsque $\mathscr{P}$ est **Vraie** et inversement. On la note non($\mathscr{P}$) (ou encore $\neg\mathscr{P}$ ou $\overline{\mathscr{P}}$).

Exemple 1.28. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(x) : x \geqslant 2$, alors non($\mathscr{P}(x)$) : $x < 2$.

Remarque 1.29. On peut aussi dire que l'assertion non($\mathscr{P}$) est définie à l'aide de la **table de vérité** suivante :

$\mathscr{P}$	non($\mathscr{P}$)
V	F
F	V

Proposition 1.30

Soit $\mathscr{P}$ une assertion, alors non(non($\mathscr{P}$)) $\equiv \mathscr{P}$.

Démonstration. Écrivons la table de vérité correspondante.

$\mathscr{P}$	non($\mathscr{P}$)	non(non($\mathscr{P}$))
V	F	V
F	V	F

$\square$

II.3 Conjonction "et" et disjonction "ou"

Définition 1.31. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions. On appelle **conjonction** des assertions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ et on note $[\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}]$ (ou encore $\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$) l'assertion qui est **Vraie** lorsque $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont toutes les deux **Vraies** et **Fausse** sinon.

Remarque 1.32. La définition précédente est équivalente à la table de vérité suivante :

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.33. Considérons les assertions :
- $\mathscr{P}(x) : x \in \mathbb{Z}$;
- $\mathscr{Q}(x) : x \geqslant 0$;
- $\mathscr{R}(x) : x \in \mathbb{N}$.

Alors :

$$[\mathscr{P}(x) \text{ et } \mathscr{Q}(x)] \equiv \mathscr{R}(x).$$

Définition 1.34. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions. On appelle **disjonction** de ces assertions et on note $[\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}]$ (ou encore $\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$) l'assertion qui est **Fausse** lorsque $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont toutes les deux **Fausses** et **Vraie** sinon.

Remarque 1.35. La définition précédente est équivalente à la table de vérité suivante :

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque 1.36. Le «ou» mathématique est **inclusif**. L'assertion $[\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}]$ est vraie si l'une au moins des assertions $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$ est vraie.

Exemple 1.37. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons :
- $\mathscr{P}(x) : x \geqslant -1$;
- $\mathscr{Q}(x) : x \leqslant 0$.

Alors $\big[\mathscr{P}(x)$ ou $\mathscr{Q}(x)\big]$ est une assertion qui est vraie pour tout x.

Proposition 1.38 (Lois de Morgan)

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions. Alors :

$$\text{non}(\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q}) \equiv (\text{non}(\mathscr{P})) \text{ et } (\text{non}(\mathscr{Q})),$$
$$\text{non}(\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q}) \equiv (\text{non}(\mathscr{P})) \text{ ou } (\text{non}(\mathscr{Q})).$$

Démonstration. Nous démontrerons le premier résultat en classe. Le deuxième est laissé à titre d'exercice. □

Proposition 1.39 (Distributivité)

Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ trois assertions. Alors :

$$\mathscr{P} \text{ et } [\mathscr{Q} \text{ ou } \mathscr{R}] \equiv [\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{Q}] \text{ ou } [\mathscr{P} \text{ et } \mathscr{R}]$$
$$\mathscr{P} \text{ ou } [\mathscr{Q} \text{ et } \mathscr{R}] \equiv [\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q}] \text{ et } [\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{R}].$$

Démonstration. La première identité sera faite en classe, la deuxième est laissée à titre d'exercice. □

II.4 Implication

Définition 1.40. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions. On définit l'assertion $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ comme étant :
- **Vraie** lorsque $\mathscr{P}$ est **Fausse** ou $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont toutes les deux **Vraies**,
- **Fausse** sinon.

L'assertion $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ se lit «$\mathscr{P}$ **implique** $\mathscr{Q}$». On parle aussi de l'**implication** $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$. On dit que $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$ est l'**implication réciproque** (ou tout simplement **la réciproque**) de $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$.

Remarque 1.41. La définition précédente est équivalente à la table de vérité suivante :

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposition 1.42

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions. Alors :
- $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \equiv [\text{non}(\mathscr{P}) \text{ ou } \mathscr{Q}]$,
- $\text{non}(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \equiv [\mathscr{P} \text{ et non}(\mathscr{Q})]$.

Démonstration. Le résultat découle de la table de vérité suivante :

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	$\text{non}(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q})$	$\text{non}(\mathscr{Q})$	$\mathscr{P}$ et $\text{non}(\mathscr{Q})$
V	V	V	**F**	F	**F**
V	F	F	**V**	V	**V**
F	V	V	**F**	F	**F**
F	F	V	**F**	V	**F**

□

Exemple 1.43. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons :
- $\mathscr{P}(x) : x \geqslant 2$;
- $\mathscr{Q}(x) : x^2 \geqslant 4$.

Alors, $\mathscr{P}(x) \Rightarrow \mathscr{Q}(x)$ est vraie. Cependant, la réciproque est fausse. En effet, pour $x = -2$:

$$x^2 \geqslant 4 \quad \text{et} \quad x < 2,$$

donc $[\mathscr{Q}(x) \text{ et non}(\mathscr{P}(x))]$ est vraie (i.e. non $(\mathscr{Q}(x) \Rightarrow \mathscr{P}(x))$ est vraie). En revanche, si on définit l'assertion $\mathscr{R}(x) : x \leqslant -2$, alors les deux implications ci-dessous sont vraies :

$$[\mathscr{P}(x) \text{ ou } \mathscr{R}(x)] \Rightarrow \mathscr{Q}(x) \quad \text{et} \quad \mathscr{Q}(x) \Rightarrow [\mathscr{P}(x) \text{ ou } \mathscr{R}(x)].$$

II.5 Équivalence

Définition 1.44. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions. On note $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$ l'assertion

$$\big[(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \text{ et } (\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P})\big],$$

et on lit «$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont **équivalentes**».

1 En s'inspirant de la démonstration précédente, écrire la table de vérité de $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$.

Exemple 1.45. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x \in \{-2; 2\}.$$

II.6 Conditions nécessaires, conditions suffisantes

Définition 1.46.
- On dit que $\mathscr{Q}$ est une **condition nécessaire pour** $\mathscr{P}$ lorsque l'implication $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ est vraie, autrement dit lorsque le fait que $\mathscr{P}$ soit vraie entraîne nécessairement le fait que $\mathscr{Q}$ soit vraie aussi. On dit aussi « Pour que $\mathscr{P}$ soit vraie, il faut que $\mathscr{Q}$ soit vraie. »
- On dit que $\mathscr{Q}$ est une **condition suffisante pour** $\mathscr{P}$ lorsque l'implication $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$ est vraie autrement dit lorsqu'il suffit que $\mathscr{Q}$ soit vraie pour que $\mathscr{P}$ le soit aussi.
- On dit que $\mathscr{Q}$ est une **condition nécessaire et suffisante pour** $\mathscr{P}$ lorsque l'équivalence $\mathscr{Q} \Leftrightarrow \mathscr{P}$ est vraie autrement dit lorsque $\mathscr{P}$ est vraie si et seulement si $\mathscr{Q}$ est vraie. On dit aussi « Pour que $\mathscr{P}$ soit vraie, il faut et il suffit que $\mathscr{Q}$ soit vraie. »

2 Soit x un nombre réel. La propriété $x \geqslant 1$ est-elle une condition nécessaire pour la propriété $x^2 + x - 1 \geqslant 0$? Une condition suffisante ?

II.7 Quantificateurs

Définition 1.47. Soit $\mathscr{P}(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On définit l'assertion :

$$\forall x \in E,\ \ \mathscr{P}(x)$$

comme étant **Vraie** lorsque $\mathscr{P}(x)$ est **Vraie** pour tous les éléments x de E. On lit « **quel que soit** x **appartenant à** E**,** $\mathscr{P}(x)$ ».

3 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) \leqslant 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 1$.

Définition 1.48. Soit $\mathscr{P}(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On définit l'assertion :

$$\exists x \in E,\ \ \mathscr{P}(x)$$

comme étant **Vraie** lorsqu'il existe (au moins) un élément x de E pour lequel $\mathscr{P}(x)$ est **Vraie**. On lit « **il existe** x **appartenant à** E **tel que** $\mathscr{P}(x)$ ».

4 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$;
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1$;
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 1$.

Définition 1.49. Soit $\mathscr{P}(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in E$. On définit l'assertion :

$$\exists! x \in E,\ \mathscr{P}(x)$$

comme étant **Vraie** lorsqu'il existe exactement un élément x de E pour lequel $\mathscr{P}(x)$ est **Vraie**. On lit « **il existe un unique** x **appartenant à** E **tel que** $\mathscr{P}(x)$».

5 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$;
- $\exists! x \in \mathbb{C},\ x^2 = -1$;
- $\exists! x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = 1$.

Remarque 1.50. On peut construire des phrases mathématiques plus compliquées mélangeant les différents types de quantificateurs. Attention à ne pas les inverser ! Par exemple, l'assertion suivante est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x \leqslant n.$$

Cependant, l'assertion suivante est fausse :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x \leqslant n.$$

Proposition 1.51

$$\begin{aligned} \mathrm{non}(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)) &\equiv \exists x \in E,\ \mathrm{non}(\mathscr{P}(x)), \\ \mathrm{non}(\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)) &\equiv \forall x \in E,\ \mathrm{non}(\mathscr{P}(x)). \end{aligned}$$

Exemple 1.52. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **positive** si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.$$

Ainsi, f n'est pas positive ssi (si et seulement si) :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0.$$

6 Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **croissante** si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)\big).$$

Écrire la négation de l'assertion précédente.

7 Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite **majorée** si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$$

Écrire la négation de cette assertion.

III Raisonnements

III.1 Raisonnement direct ou par implication(s)

Méthode (Démonstration directe par implication $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$). Pour démontrer qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie, on peut démontrer qu'elle découle de résultats déjà connus. Autrement dit, on part d'une assertion $\mathscr{Q}$ vraie et on démontre que l'implication $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$ est vraie (en effectuant éventuellement une chaîne d'implications). La démonstration dut fait que l'implication $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$ est vraie commence en général par « Supposons que $\mathscr{Q}$ est vraie » et se termine par « Donc $\mathscr{P}$ est vraie. »

Définition 1.53. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $n! = n \times (n-1) \times \dots 1$. On note encore $0! = 1$.

Définition 1.54. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. On pose :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ce nombre est appelé **coefficient binomial** et se lit «k parmi n». Par convention, ce coefficient est égal à zéro lorsque $k > n$.

Proposition 1.55

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. Alors :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Démonstration. Vue en cours. □

Exemple 1.56. Démontrons que : $0 \leqslant x \leqslant 2 \Longrightarrow \sqrt{x^2+5} \leqslant 3$. On a :

$$0 \leqslant x \leqslant 2 \Longrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 4 \Longrightarrow 0 \leqslant x^2 + 5 \leqslant 9 \Longrightarrow 0 \leqslant \sqrt{x^2+5} \leqslant 3.$$

8 On rappelle que $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^\star\right\}$. Démontrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et que $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, alors $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Méthode (Démonstration d’une assertion $(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x))$). Démontrer une propriété du type $(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x))$, consiste à se donner un élément quelconque x appartenant à l’ensemble E et à démontrer que l’assertion $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour cet élément x. La démonstration commence toujours par « Soit $x \in E$ » ou « Soit x un élément de E » et se termine par « Donc $\mathscr{P}(x)$ est vraie. »

Exemple 1.57. Démontrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2(x) \leqslant 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Donc :

$$1 - \sin^2(x) = \cos^2(x) \geqslant 0.$$

D’où :

$$\sin^2(x) \leqslant 1.$$

III.2 Disjonction de cas

Pour démontrer la véracité d’une assertion $\mathscr{P}$, on peut partir d’une assertion $\mathscr{Q}$ et démontrer que les deux implications $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$ et non$(\mathscr{Q}) \Rightarrow \mathscr{P}$ sont vraies.

Exemple 1.58. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que :

$$\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

Si n est pair, alors on peut écrire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = 2k^2 + k \in \mathbb{N}.$$

Sinon, n est impair et s'écrit sous la forme $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = 2k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}.$$

On a donc bien démontré que la propriété est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

9 Démontrer qu'il existe un nombre irrationnel x tel que $x^{\sqrt{2}}$ soit rationnel. On pourra poser $y = \sqrt{2}$ et considérer $y^{\sqrt{2}}$ (très très difficile).

III.3 Raisonnement par négation

Méthode. Pour démontrer qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie, on peut démontrer que non($\mathscr{P}$) est fausse et vice versa.

Exemple 1.59. Démontrons qu'il n'existe pas d'entier plus grand que tous les autres. Notons $\mathscr{P}$ l'assertion :

$$\mathscr{P} \ : \ \exists M \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \leqslant M.$$

Alors :

$$\text{non}(\mathscr{P}) \ : \ \forall M \in \mathbb{N}, \ \exists n \in \mathbb{N}, \ n > M.$$

Soit alors $M \in \mathbb{N}$. Posons $n = M + 1$. Alors, n est un entier strictement plus grand que M, ce qui démontre que non($\mathscr{P}$) est vraie.

III.4 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde se base sur le fait que l'assertion

$$\Big[\Big(\text{non}(\mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{Q}\Big) \text{ et } \text{non}(\mathscr{Q})\Big] \Rightarrow \mathscr{P}$$

est toujours vraie.

Méthode. Démontrer par l'absurde qu'une assertion $\mathscr{P}$ est vraie consiste à supposer que $\mathscr{P}$ est fausse et à en déduire une absurdité. Ce raisonnement permet alors de conclure que $\mathscr{P}$ est nécessairement vraie.

10 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

III.5 Raisonnement par contraposée

Proposition 1.60

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux assertions. Alors :

$$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \equiv \big[\text{non}(\mathscr{Q}) \Rightarrow \text{non}(\mathscr{P})\big].$$

Démonstration. Exercice : écrire la table de vérité correspondante. □

Définition 1.61. L’implication non($\mathscr{Q}$) $\Rightarrow$ non($\mathscr{P}$) s’appelle la **contraposée** de l’implication $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$.

11 Démontrer que :

$$x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q},$$

en considérant la contraposée de cette assertion.

12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si n^2 est pair alors n l’est aussi.

III.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode destinée à déterminer les solutions d’un problème. Elle se décompose en deux étapes.

- Analyse : on cherche des conditions **nécessaires** sur les solutions éventuelles du problème. On réduit ainsi les solutions potentielles à un petit nombre.
- Synthèse : on vérifie si les solutions éventuelles trouvées à la première étape conviennent et on écarte les «faux-positifs».

Exemple 1.62. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(E) : \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{3x - 5}.$$

- Analyse : soit x une solution de (E). Alors, en élevant au carré :
  $$x^2 - 3x = 3x - 5,$$
  i.e.
  $$x^2 - 6x + 5 = 0$$
  et donc :
  $$(x - 1)(x - 5) = 0.$$
  Ainsi, **si** x est solution, **alors** $x \in \{1, 5\}$.
- Synthèse : soit $x = 5$, alors on a bien :
  $$\sqrt{5^2 - 3 \times 5} = \sqrt{3 \times 5 - 5}.$$
  Cependant, pour $x = 1$, l’équation (E) n’a pas de sens et donc il faut écarter la «fausse solution» $x = 1$.

Conclusion : l’équation (E) admet pour unique solution $x = 5$.

13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Démontrer que f s’écrit de manière unique comme somme d’une fonction paire et d’une fonction impaire. Indication : on pourra écrire $f = g + h$ puis calculer $f(x) + f(-x)$ et $f(x) - f(-x)$.

III.7 Démonstration par récurrence

Théorème 1.63

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d’un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Si :

(i) $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie, (**initialisation**)

(ii) pour tout $n \geqslant n_0$, l’assertion $\big(\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)\big)$ est vraie, (**hérédité**)

alors, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$. (**conclusion**)

Exemple 1.64. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Notons :

$$\mathscr{P}(n) : 1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

- **Initialisation**. $\mathscr{P}(1) : 1 = 1$ est vraie.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2(n + 1) - 1) &= [1 + 3 + \ldots + (2n - 1)] + [2(n + 1) - 1] \\ &= n^2 + [2n + 1] \\ &= (n + 1)^2, \end{aligned}$$

  et donc $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie.
- **Conclusion**. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Définition 1.65. On appelle suite **arithmétique** toute suite dont le terme général vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r,$$

où $r \in \mathbb{C}$ est fixé (il ne dépend pas de n) et est appelé **raison** de la suite.

Proposition 1.66

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

Démonstration. Exercice. □

14 Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Compétences à acquérir dans ce chapitre

Voici une liste des compétences principales attendues pour ce chapitre. N'hésitez pas à solliciter vos enseignants de TD pour vous proposer des exercices portant sur les compétences vous posant le plus de problème.

- Résoudre des (in)équations faisant intervenir la fonction partie entière.
- Résoudre des (in)équations faisant intervenir la fonction valeur absolue.
- Résoudre des (in)équations trigonomériques.
- Se rappeler et utiliser les formules trigonomériques.
- Effectuer des calculs de somme à l'aide du symbole Σ.
- Effectuer des calculs de produits à l'aide du symbole Π.
- Se rappeler et utiliser les identités remarquables notamment le binôme de Newton et la somme des termes d'une suite géométrique.

I Inégalités dans $\mathbb{R}$

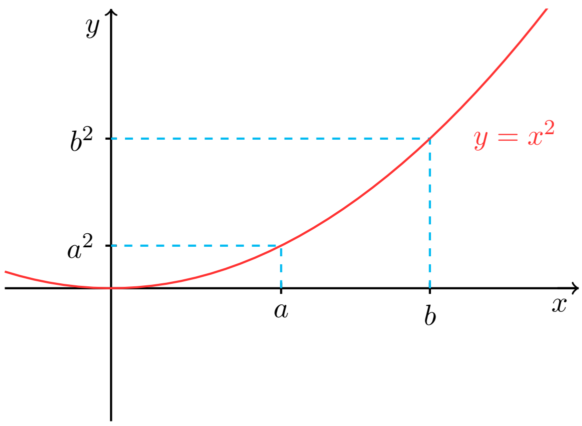
I.1 Premières propriétés

Propriétés 2.1. La **relation d'ordre** $\leqslant$ est **compatible** avec l'addition et la multiplication, au sens où, pour tous réels a, b, c et d :
- $a \leqslant b \implies -b \leqslant -a$;
- $a \leqslant b$ et $c > 0 \implies ac \leqslant bc$;
- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$.

Remarque 2.2. Ces propriétés sont encore valables pour les relations d'ordre $\geqslant$, $<$ et $>$.

Remarque 2.3. Les inégalités sont compatibles avec les fonctions croissantes. On a donc, par exemple :

$$0 \leqslant a \leqslant b \implies a^2 \leqslant b^2.$$



15 Soit $a \leqslant b \leqslant 0$. Que peut-on dire de a^2 et b^2 ?

I.2 Intervalles

Définition 2.4. Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est un ensemble A vérifiant :

$$\forall (a, b) \in A^2,\ \forall t \in [0; 1], \quad ta + (1 - t)b \in A.$$

Autrement dit, quels que soient les points a et b de A, le segment reliant a à b est inclus dans A.

Illustration 2.5. Où se trouve le point $ta + (1 - t)b$ lorsque $t = 0, 1/3, 1/2, 1$?

Définitions 2.6. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$. L'**intervalle (fermé)** ou **segment** $[a;b]$ est l'ensemble des réels compris entre a et b au sens large :

$$[a;b] = \{t \in \mathbb{R},\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

L'intervalle $[a,+\infty[$ est l'ensemble des réels supérieurs à a :

$$[a,+\infty[= \{t \in \mathbb{R},\ a \leqslant t\}.$$

On définit de même les intervalles ouverts et semi-ouverts à l'aide d'inégalités strictes. Lorsque $a=b$, on parle de **singleton** et on note $\{a\}$ l'ensemble contenant uniquement l'élément a.

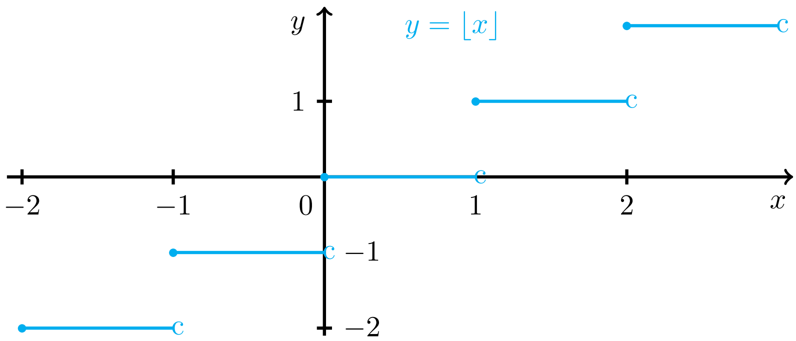
Remarque 2.7. L'ensemble vide est un intervalle.

16 Lister tous les types d'intervalles de $\mathbb{R}$ (indice : il y en a 9).

I.3 Partie entière

Définition 2.8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x et on note $\lfloor x \rfloor$ (ou $E(x)$) le plus grand entier n tel que $n \leqslant x$.

Illustration 2.9.



Exemple 2.10. $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor 12 \rfloor = 12$, $\lfloor -4 \rfloor = -4$.

Proposition 2.11

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

I.4 Approximation décimale

Proposition 2.12

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\frac{1}{10^n}\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant x < \frac{1}{10^n}\lfloor 10^n x \rfloor + \frac{1}{10^n}.$$

Démonstration. Il suffit de poser $y = 10^n x$ et d'appliquer la proposition précédente à y. □

Définition 2.13. Les nombres encadrant x dans la proposition précédente sont appelés **parties décimales par défaut** et **par excès** du nombre x à la précision 10^{-n}.

Exemple 2.14. Rappelons que $\pi = 3,141592653\ldots$. La valeur décimale par défaut à 10^{-4} près de π est $3,1415$ et celle par excès est $3,1416$.

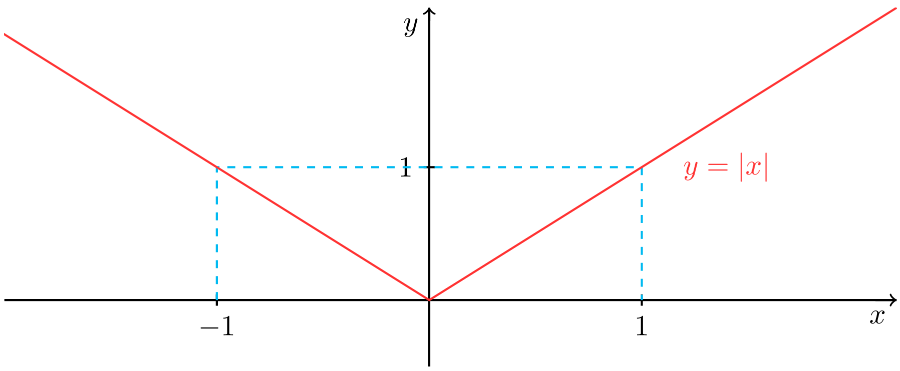
I.5 Valeur absolue

Définition 2.15. Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemples 2.16. $|-2| = 2$, $|2| = 2$, $|-40| = 40$.

Illustration 2.17. Graphe de la fonction valeur absolue.



Propriétés 2.18

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

(i) $|x| \geqslant 0$;

(ii) $|xy| = |x||y|$;

(iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire) ;

(iv) $|x - y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$ (inégalité triangulaire renversée).

Démonstration. Admis. □

Remarque 2.19. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \geqslant 0$. Alors :
- $|x| = \max(x, -x)$;
- $|x| \leqslant r \iff -r \leqslant x \leqslant r$.

17 Résoudre l'inéquation d'inconnue x suivante : $|x - 1| \leqslant 3$. Interpréter graphiquement le résultat.

II Trigonométrie

Dans tout ce qui suit, on munit le plan d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

II.1 Le cercle trigonométrique

Définition 2.20. Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1. On le notera $\mathscr{C}$ dans la suite.

Définition 2.21. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et M le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \theta$.

- Le **cosinus** de θ, noté $\cos\theta$, est l'abscisse du point M.
- Le **sinus** de θ, noté $\sin\theta$, est l'ordonnée du point M (cf illustration 2.24).

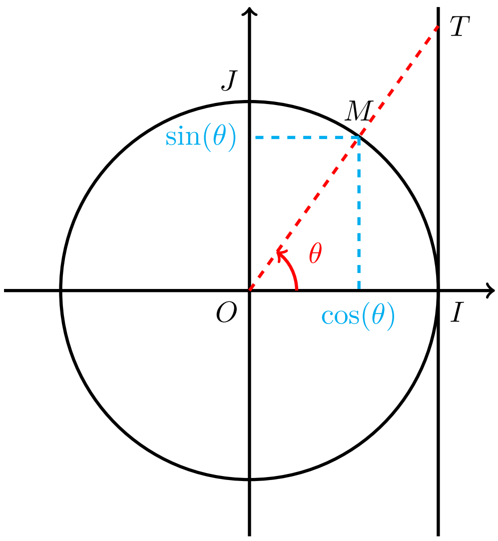
Définition 2.22. Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. La **tangente** de θ est le nombre réel :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Propriété 2.23. Si on note T le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$, alors T a pour ordonnée $\tan\theta$.

Démonstration. Exercice : appliquer le théorème de Thalès. □

Illustration 2.24.



Rappel 2.25. Le réel θ correspond à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ à laquelle on a éventuellement ajouté ou retranché un multiple de 2π.

II.2 Propriétés des fonctions circulaires

Propriétés 2.26. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$;
(ii) $-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$;
(iii) $\forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$;
(iv) $\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$;
(v) $\cos(-\theta) = \cos\theta$;
(vi) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$;
(vii) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Démonstration. Les points (i) à (vi) sont évidents. Quant au point (vii), c'est une conséquence du théorème de Pythagore. □

Proposition 2.27

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Démonstration. Admis. □

Remarque 2.28. Ces deux formules (à connaître par cœur) permettent de simplifier les expressions du type $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(\theta+\pi)$, $\sin(\pi/2-\theta)$, etc... Elles permettent aussi de retrouver les formules :

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta,$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta.$$

Exemple 2.29. On a :

$$\cos(\theta+\pi) = \cos\theta\cos\pi - \sin\theta\sin\pi = -\cos\theta.$$

Propriétés 2.30

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

Démonstration. Admis. □

Propriété 2.31

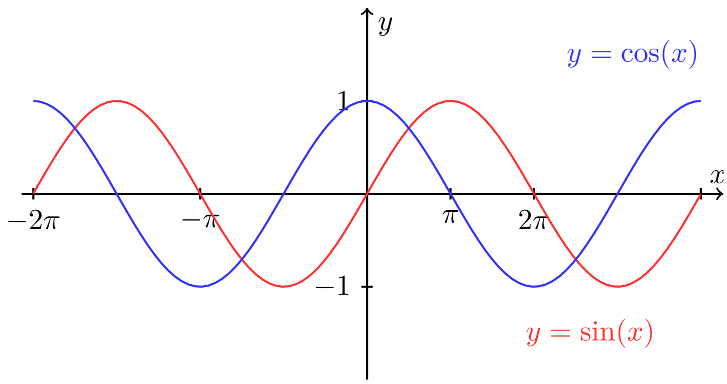
La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Démonstration. Exercice. □

II.3 Représentations graphiques

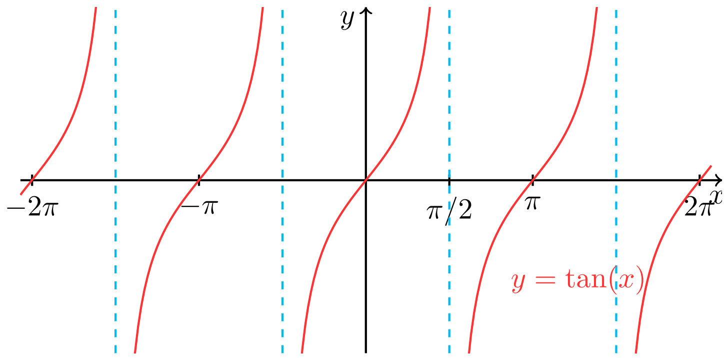
La fonction cosinus est paire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction sinus est quant à elle impaire. Sa courbe représentative présente donc une symétrie par rapport à l'origine du repère.
Illustration 2.32. Graphe des fonctions sinus et cosinus.



Propriété 2.33. La fonction tangente est π-périodique (c'est-à-dire que pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$) et impaire.

Démonstration. Exercice. □

Illustration 2.34. Graphe de la fonction tangente.

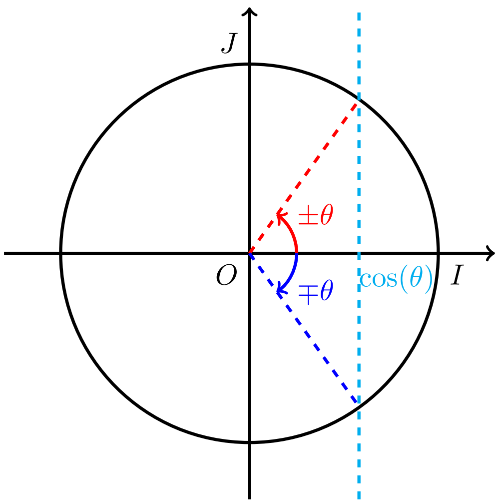


II.4 Résolution d'équations trigonométriques

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On cherche à déterminer les solutions de l'équation suivante :

$$\cos x = \cos\theta.$$

Pour ce faire, on dessine le cercle trigonométrique :



On en déduit que :

$$\cos x = \cos\theta \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ou}\left|\begin{array}{ll} x & = \theta + 2k\pi, \\ x & = -\theta + 2k\pi. \end{array}\right.$$

On démontre de même que :

$$\sin x = \sin\theta \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ou} \left| \begin{array}{ll} x & = \theta + 2k\pi, \\ x & = \pi - \theta + 2k\pi. \end{array} \right.$$

Enfin, si $\theta \notin \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, alors :

$$\tan x = \tan\theta \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \theta + k\pi.$$

Remarque 2.35. Ces résultats ne sont pas à connaître par cœur. Il faut être capable de reproduire le raisonnement présenté ci-dessus.

III Sommes et produits

III.1 La notation $\sum$ (sigma)

Définition 2.36. Soit $(u_1, \cdots, u_N)$ une famille de nombres réels (ou complexes). On note :

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_N.$$

On lit «**somme** pour k variant de 1 à N des u_k».

Remarque 2.37. En toute rigueur, il faudrait définir le symbole Σ par récurrence.

Remarque 2.38. Dans la définition précédente, k est une **variable muette**. Le résultat de la somme **ne dépend pas** de k.

Exemples 2.39. On a :

$$\sum_{k=0}^{3} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \sum_{j=0}^{3} j^2,$$

$$\sum_{k=1}^{2} 2k\cos(k\pi/2) = 2\cos(\pi/2) + 2 \times 2\cos(\pi) = -4,$$

$$\sum_{k=1}^{10} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = 10.$$

Propriété 2.40

Pour toutes familles $(u_1, \cdots, u_N)$ et $(v_1, \cdots, v_N)$, pour tout nombre complexe λ :

$$\sum_{k=1}^{N} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=1}^{N} u_k + \sum_{k=1}^{N} v_k.$$

Remarque 2.41. Effectuer un **changement d'indice** dans une somme peut s'avérer utile. Par exemple :

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{p=1}^{n-2} u_{p+2}.$$

En effet, en posant $p = k - 2$, on a :

$$\begin{cases} 3 \leqslant k \leqslant n \\ p = k - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant p \leqslant n - 2 \\ k = p + 2 \end{cases}.$$

18 Écrire les deux sommes de la remarque précédente à l'aide de points de suspension et vérifier le résultat.

Proposition 2.42

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

III.2 Les notations $\prod$ (pi) et ! (factorielle)

Définition 2.43. Soit $(u_1, \cdots, u_N)$ une famille de nombres réels (ou complexes). On note :

$$\prod_{k=1}^{N} u_k = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_N.$$

On lit «**produit** pour k variant de 1 à N des u_k».

Remarque 2.44. Tout comme pour la somme, k est une **variable muette**. Le résultat du produit **ne dépend pas de** k.

Remarque 2.45. En toute rigueur, le symbole Π devrait être défini par récurrence.

Exemples 2.46. On a :

$$\prod_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2 = 36, \qquad \prod_{k=4}^{6} 2 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8.$$

Remarque 2.47. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Propriété 2.48

Pour toutes familles $(u_1, \cdots, u_N)$ et $(v_1, \cdots, v_N)$:

$$\prod_{k=1}^{N} \left(u_k v_k\right) = \left(\prod_{k=1}^{N} u_k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{N} v_k\right) \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{N} \frac{u_k}{v_k} = \frac{\prod_{k=1}^{N} u_k}{\prod_{k=1}^{N} v_k},$$

où la deuxième égalité est valable dès que $v_k \neq 0$ pour tout $k \in [\![1, N]\!]$.

IV Quelques identités remarquables

IV.1 Factorisation de $a^n - b^n$

Proposition 2.49

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \geqslant 2$ un entier. Alors :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Remarque 2.50. Il s'agit d'une généralisation de l'identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Démonstration. Il suffit de développer le produit dans le membre de droite : exercice. □

Corollaire 2.51

Soient $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

IV.2 Coefficients binomiaux

Rappel 2.52. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. On rappelle que le **coefficient binomial** k **parmi** n est défini par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque 2.53. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

19 Lister tous les sous-ensembles de $\{1,2,3,4\}$ contenant exactement 3 éléments. Calculer ensuite $\binom{4}{3}$.

Proposition 2.54

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. Alors :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Démonstration. Vue au chapitre 1. $\square$

Proposition 2.55 (Relation de Pascal)

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$. Alors :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. $\square$

Illustration 2.56. Le triangle de Pascal.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

IV.3 Formule du binôme de Newton

Proposition 2.57

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque 2.58. Cette formule est à connaître par cœur !

Remarque 2.59. Il s'agit d'une généralisation de la formule :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Remarque 2.60. À l'aide du triangle de Pascal, il devient facile de développer des expressions de ce type. Par exemple :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. $\square$

20 Développer $(x+y)^6$ pour deux réels quelconques x et y.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Simplifier la somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k.$$

Compétences à acquérir dans ce chapitre

Voici une liste des compétences principales attendues pour ce chapitre. N'hésitez pas à solliciter vos enseignants de TD pour vous proposer des exercices portant sur les compétences vous posant le plus de problème.

- Manipuler les symboles ensemblistes.
- Déterminer l'image d'un ensemble par une application.
- Déterminer l'image réciproque d'un ensemble par une application.
- Déterminer le caractère bijectif ou non d'une application.
- Déterminer la bijection réciproque d'une application bijective.
- Effectuer des calculs de dénombrement sur des ensembles finis.

I Ensembles

I.1 Rappels du chapitre 1

Définition 3.1. Un **ensemble** E est une collection d'objets appelés **éléments**. Si x est un élément de E, alors on note $x \in E$. Sinon, on note $x \notin E$.

Remarque 3.2. On peut se représenter un ensemble par un sac. Ce que contient le sac sont ses éléments.

Exemple 3.3. L'ensemble $\{2n, n \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des nombres pairs.

Exemple 3.4. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Définition 3.5. On appelle **ensemble vide** et on note $\varnothing$ l'ensemble ne contenant aucun élément (penser à un sac vide).

Définition 3.6. Soient E et F deux ensembles. On dit qu'ils sont **égaux** et on note $E = F$ si ils contiennent les mêmes éléments.

Remarque 3.7. Il n'y a pas nécessairement de relation d'ordre dans un ensemble. Il n'y a pas non plus de répétition des éléments. Ainsi : $\{1; 2\} = \{2; 1\}$.

Définition 3.8. Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F et on note $E \subset F$ si tous les éléments de E sont aussi des éléments de F.

Remarque 3.9. $E \subset F$ si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ x \in F.$$

Méthode. En pratique, pour montrer que $E \subset F$, on peut commencer à raisonner de la façon suivante : «soit $x \in E$, montrons que $x \in F$».

Remarque 3.10. Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Définition 3.11. Soient E et F deux ensembles. À partir de $x \in E$ et de $y \in F$, on forme le **couple** (x, y) défini de sorte que : $(x, y) = (x', y')$ uniquement lorsque $x = x'$ et $y = y'$.

Attention. Ici, l'ordre des éléments est important. Par exemple :

$$(1, 2) \neq (2, 1).$$

Définition 3.12. On appelle **produit cartésien** de deux ensembles E et F l'ensemble formé des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$:

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Lorsque $E = F$, on note $E^2 = E \times E$.

I.2 Ensemble des parties

Définition 3.13. Soit E un ensemble. On appelle **sous-ensemble** (ou **partie**) de E tout ensemble F inclus dans E.

Définition 3.14. Soit E un ensemble. On appelle **ensemble des parties** de E et on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble formé des sous-ensembles de E.

Exemple 3.15. Soit $E = \{1; 2; 3\}$. Alors :

$$\mathscr{P}(E) = \big\{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}; \varnothing\big\}.$$

Exemple 3.16. Soit $E = \{a\}$. Alors :

$$\mathscr{P}(E) = \big\{\{a\}; \varnothing\big\}.$$

Remarque 3.17. Quel que soit l'ensemble E, on a toujours $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.

21 Écrire $\mathscr{P}(E)$ dans chacun des cas suivants :
- $E = \{x; y\}$;
- $E = \varnothing$;
- $E = \{\lhd; \rhd\}$.

I.3 Réunion, intersection et complémentaire

Dans cette partie, on notera E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

Définition 3.18. On appelle **intersection** de A et de B et on note $A \cap B$ l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B.

Remarque 3.19. En termes mathématiques :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

Exemple 3.20. Soient $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{3; 4; 5\}$, alors $A \cap B = \{3\}$.

Proposition 3.21

(i) $A \cap B = B \cap A$;

(ii) $A \cap A = A$;

(iii) $A \cap E = A$;

(iv) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Définition 3.22. On appelle **réunion** de A et de B et on note $A \cup B$ l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B.

Remarque 3.23. En termes mathématiques :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Exemple 3.24. Soient $A = \{1;2;3\}$ et $B = \{3;4;5\}$, alors $A \cup B = \{1;2;3;4;5\}$.

Proposition 3.25

(i) $A \cup B = B \cup A$;

(ii) $A \cup A = A$;

(iii) $A \cup E = E$;

(iv) $A \cup \varnothing = A$.

Définition 3.26. Les ensembles A et B sont dits **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.

Définition 3.27. Le **complémentaire** de A (dans E), noté $E \backslash A$ (ou $\bar{A}$) est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

Remarque 3.28. En termes mathématiques :

$$x \in E \backslash A \Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin A.$$

Définition 3.29. L'ensemble B **privé de** A (noté $B \backslash A$) est l'ensemble des éléments de E qui sont dans B mais pas dans A. Autrement dit :

$$B \backslash A = \{x \in E, x \in B \text{ et } x \notin A\}.$$

Exemple 3.30. Soient $E = \{1;2;3;4;5;6\}$, $A = \{1;2;3\}$ et $B = \{3;4;5\}$. Alors :

$$E \backslash A = \{4;5;6\}. \quad \text{et} \quad B \backslash A = \{4;5\}.$$

Proposition 3.31 (Lois de Morgan)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Démonstration. Démontrons le premier point. Le deuxième est laissé à titre d'exercice. Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow \text{non}\,(x \in A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \text{non}\,(x \in A \text{ ou } x \in B) \\ &\Leftrightarrow \text{non}(x \in A) \text{ et } \text{non}(x \in B), \end{aligned}$$

où le dernier point provient des Lois de Morgan vues au chapitre 1. On a donc démontré que :

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ et } \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Ainsi, les éléments de $\overline{A \cup B}$ sont les mêmes que ceux de $\overline{A} \cap \overline{B}$. □

Proposition 3.32 (Distributivité)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Démonstration. Notons $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ les assertions $x \in A$, $x \in B$ et $x \in C$ respectivement. Alors, la première propriété se traduit par :

$$\mathscr{P} \text{ ou } (\mathscr{Q} \text{ et } \mathscr{R}) \equiv (\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{Q}) \text{ et } (\mathscr{P} \text{ ou } \mathscr{R}).$$

La deuxième propriété se démontre de manière analogue (exercice). □

II Applications

II.1 Définitions

Définition 3.33. Soient E et F deux ensembles. Une **application** f de E dans F est la donnée d'une partie Γ de $E \times F$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ (x, y) \in \Gamma.$$

Γ est appelé le **graphe** de la fonction f.

Remarque 3.34. Cette définition très formelle est une reformulation la définition 1.18 donnée dans le chapitre 1. Elle met en exergue le fait qu'une application (ou une fonction) prend une valeur et une seule en un point donné de l'ensemble de départ. C'est pourquoi un trait vertical sur le graphe d'une fonction n'a aucun sens !

Définitions 3.35. Si $x \in E$, alors on note $f(x)$ l'unique y de la définition précédente. Il est appelé l'**image** par f de l'élément x. Pour tout $y \in F$, les x tels que $f(x) = y$ (si il y en a) sont appelés **antécédents** par f de y. On écrira l'application f de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} f & : & E & \to & F. \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque 3.36. Une application est donc la donnée de 3 éléments : l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et les images des éléments de l'ensemble de départ. Les applications ci-dessous sont donc toutes différentes :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+, \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} h & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Remarque 3.37. On peut définir une fonction en donnant la liste de ses images plutôt qu'à l'aide d'une «formule» générale. Par exemple :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \{1;2;3\} & \to & \{a;b\}. \\ & & 1 & \mapsto & a \\ & & 2 & \mapsto & b \\ & & 3 & \mapsto & a \end{array}$$

Remarque 3.38. On peut définir une fonction par disjonction de cas, comme on l'a fait par exemple pour la valeur absolue.

Définition 3.39. Soit E un ensemble. L'application **identité** sur E est l'application :

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{id}_E & : & E & \to & E. \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$$

Exemple 3.40. Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels peut être vue comme une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcccc} u & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}. \\ & & n & \mapsto & u_n \end{array}$$

C'est d'ailleurs pourquoi on utilise parfois la notation $u(n)$ plutôt que u_n.

Définition 3.41. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E,F)$ (ou parfois F^E).

Remarque 3.42. On écrira indifférement « f est une application de E dans F » ou « $f \in \mathscr{F}(E,F)$ » ou encore $f\colon E \to F$.

II.2 Restriction et composition

Définition 3.43. Soient $f\colon E \to F$ une application et $A \subset E$. La **restriction** de f à A est l'application :

$$f_{|A} \quad : \quad \begin{array}{ccc} A & \to & F. \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple 3.44. Considérons la fonction sinus :

$$\sin \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

Sa restriction à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ est :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} [-\pi/2, \pi/2] & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

Définition 3.45. Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux applications. La **composée** de f par g, notée $g \circ f$ est :

$$g \circ f \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \to & G. \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Cette application est bien définie car $f(x) \in F$.

22 Soient les fonctions f et g définies par :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+. \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Déterminer $g \circ f$.

Exemple 3.46. Considérons $E = \{1; 2\}$, $F = \{7, 8, 9\}$ et $G = \{-1, -2\}$. Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to H$ définies par :

- $f(1) = 7$,
- $f(2) = 9$,
- $g(7) = g(8) = g(9) = -1$.

Alors :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = -1.$$

Remarque 3.47. En général, $f \circ g \neq g \circ f$. Il se peut d'ailleurs que $g \circ f$ ait un sens alors que $f \circ g$ ne soit pas définie (cf exemple précédent).

Proposition 3.48

Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$, $g \in \mathscr{F}(F,G)$ et $h \in \mathscr{F}(G,H)$, alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \text{et} \qquad f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_F \circ f = f.$$

Démonstration. Exercice. □

II.3 Image d'un ensemble par une application

Définition 3.49. Soient $f\colon E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle **image** de A par f et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}.$$

Exemple 3.50. Considérons $E = \{1;2;3\}$, $F = \{a,b,c\}$ et $f\colon E \to F$ définie par :

$$f(1) = f(2) = a \text{ et } f(3) = c.$$

Alors :
- $f(\{1;2\}) = \{f(x), x \in \{1;2\}\} = \{f(1); f(2)\} = \{a\}$;
- $f(E) = \{f(x), x \in E\} = \{f(1); f(2); f(3)\} = \{a; c\}$.

23 Soit f l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$$

Déterminer $f(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R}_+)$.

Remarque 3.51. Si $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $a \in E$, alors on a toujours :

$$f(\varnothing) = \varnothing, \quad f(\{a\}) = \{f(a)\} \quad \text{et} \quad f(E) \subset F.$$

Exemple 3.52. Soient $E = F = \mathbb{R}$ et :

$$\begin{array}{rccc} f & : & E & \to & F \\ & & x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Alors, $f(E) \subsetneq F$. On peut changer l'espace d'arrivée pour qu'il y ait égalité, mais il ne s'agit alors plus de la même application !

II.4 Image réciproque d'un ensemble par une application

Définition 3.53. Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F. Pour toute partie B de F, on appelle **image réciproque** de B par f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$ défini par :

$$f^{-1}(B) = \big\{x \in E,\ f(x) \in B\big\}.$$

Autrement dit :

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

Remarque 3.54. On a toujours $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. De plus, pour tout élément b de F :

$$f^{-1}\big(\{b\}\big) = \big\{x \in E,\ f(x) = b\big\}.$$

24 Soit :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

1. Déterminer $f^{-1}(\{4\})$.
2. Déterminer $f^{-1}(\{-1\})$.
3. Déterminer $f^{-1}([-1;2])$.

II.5 Applications bijectives

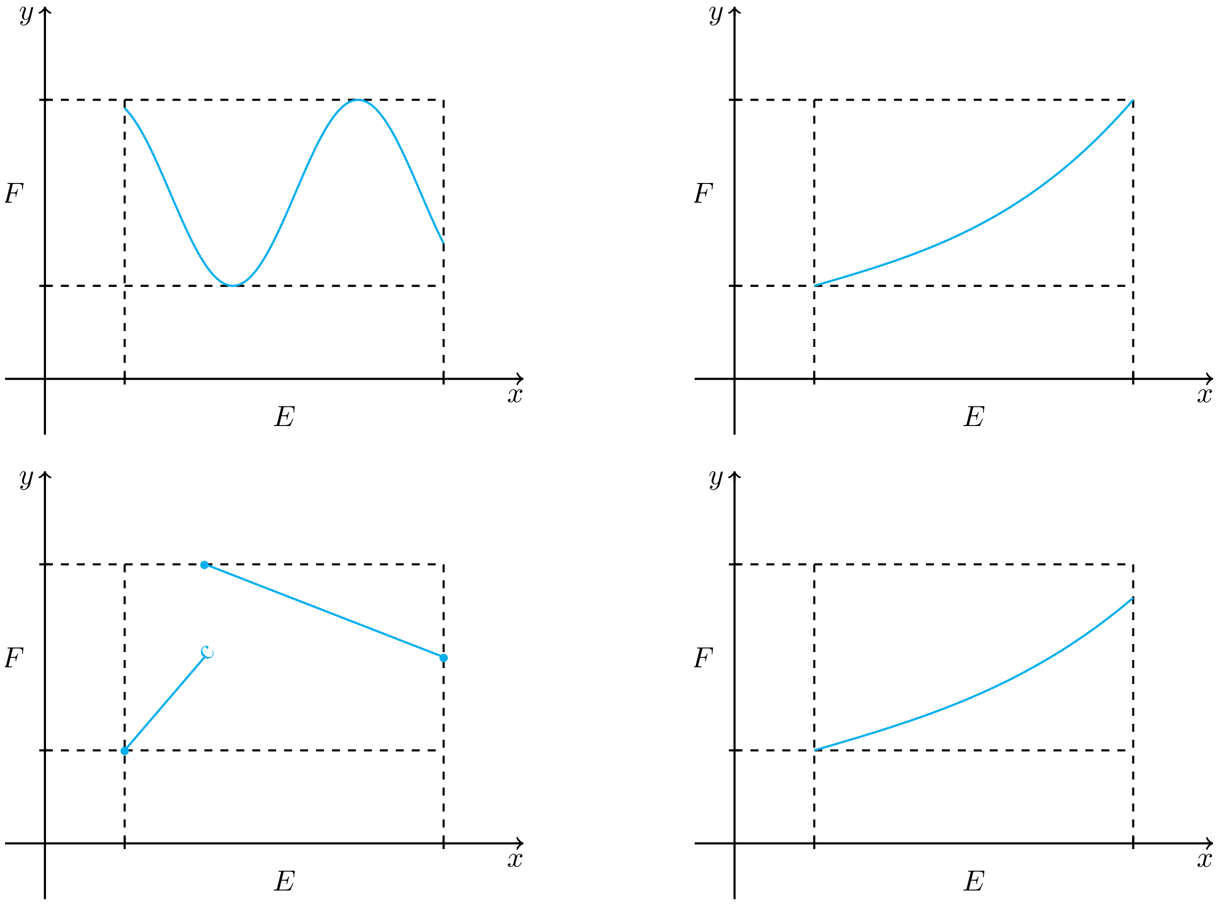
II.5.1 Définition

Définition 3.55. Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$. On dit que :

- f est **injective** si :
$$\forall (x,x') \in E^2,\ \big(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\big)$$
Autrement dit, f ne prend jamais deux fois la même valeur.
- f est **surjective** si :
$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$
Autrement dit, tous les éléments de F admettent au moins un antécédent par f.
- f est **bijective** si :
$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y.$$
Autrement dit, tous les éléments de F admettent exactement un antécédent par f.

Remarque 3.56. Une application est bijective ssi elle est injective et surjective.

25 Parmi ces applications de E dans F, lesquelles sont injectives ? Surjectives ? Bijectives ? Justifier.



26 Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Alors, f n'est pas bijective. Pourquoi ? Qu'en est-il de l'application g définie ci-dessous ?

$$\begin{array}{rccl} g & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Qu'en est-il de l'application h définie ci-dessous ?

$$\begin{array}{rccl} h & : & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Méthode. Pour étudier le caractère bijectif d'une application $f\colon E \rightarrow F$, on résout pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$:

- si pour tout $y \in F$ cette équation admet une unique solution $x \in E$, alors f est bijective
- s'il existe au moins un élément $y \in F$ pour lequel cette équation n'admet aucune solution $x \in E$ ou admet au moins deux solutions distinctes, alors f n'est pas bijective.

Exemple 3.57. Soit f l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & [1, +\infty[. \\ & & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

Soit $y \in [1, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Alors :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = y - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1},$$

où la dernière équivalence découle de $x \geqslant 0$ et de $y \geqslant 1$. Ainsi, f est bijective.

Remarque 3.58. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Pour montrer qu'une application $f\colon I \rightarrow J$ **continue** est bijective, on pourra montrer qu'elle est strictement monotone et étudier ses limites aux bornes de l'intervalle.

Exemple 3.59. Soit f l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & [1; +\infty[. \\ & & x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$$

Alors, l'application f est strictement croissante car :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) = \exp(x) > 0.$$

De plus, $f(0) = 1$ et $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Ainsi, f effectue une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$.

Proposition 3.60

Soient $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $g \in \mathscr{F}(F, G)$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f$ est une application bijective.

Démonstration. Admis. □

II.5.2 Bijection réciproque

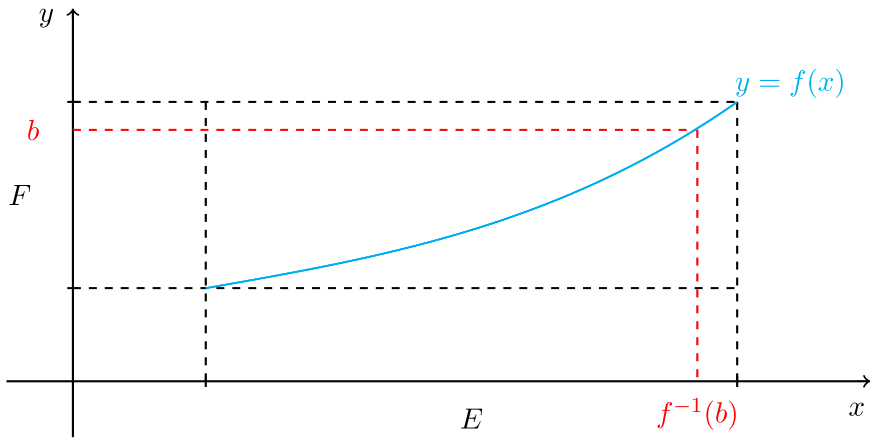
Définition 3.61. Soit $f \in \mathscr{F}(E, F)$ une application bijective. On appelle **bijection réciproque** de f et on note f^{-1} l'application qui a tout élément de F associe son unique antécédent par f.

Remarque 3.62. Si f est bijective alors pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Méthode. Pour déterminer la bijection réciproque d'une application bijective $f\colon E \to F$, on résout pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$: l'unique antécédent x par f de y est $f^{-1}(y)$.

Illustration 3.63.



Exemple 3.64. Soit f l'application :

$$\begin{array}{rccc} f & : & [0;1] & \to & [3;5]. \\ & & x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$$

Soient $y \in [3;5]$ et $x \in [0;1]$. Alors :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x + 3 \Leftrightarrow x = (y-3)/2.$$

Ainsi, la bijection réciproque de f est :

$$\begin{array}{rcccc} f^{-1} & : & [3;5] & \to & [0;1]. \\ & & y & \mapsto & (y-3)/2 \end{array}$$

Remarquons maintenant que pour tout $x \in [0;1]$:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) = \big((2x+3)-3\big)/2 = x.$$

De plus, pour tout $y \in [3;5]$:

$$f(f^{-1}(y)) = f\big((y-3)/2\big) = 2\big((y-3)/2\big) + 3 = y - 3 + 3 = y.$$

27 Soit :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \{\circ; \triangleleft\} & \to & \{-1, 1\}. \\ & & \circ & \mapsto & 1 \\ & & \triangleleft & \mapsto & -1 \end{array}$$

L'application f est-elle bijective ? Le cas échéant, déterminer sa bijection réciproque.

28 Soient $E = \{1;2;3\}$, $F = \{a, b, c\}$ et $f\colon E \to F$ l'application définie par :

$$f(1) = a, \;\; f(2) = c \;\text{ et }\; f(3) = b.$$

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Proposition 3.65

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ une application bijective. Alors :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$

De plus, f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration. Admis. □

Théorème 3.66

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ une application. Alors, il y a équivalence entre :

(i) f est bijective ;

(ii) Il existe $g \in \mathscr{F}(F,E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

De plus, si tel est le cas, g est unique et $g = f^{-1}$.

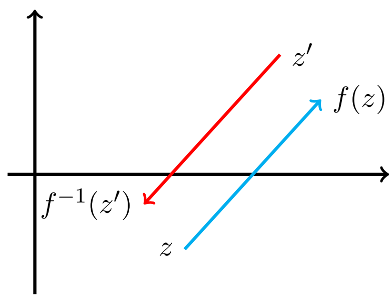
Démonstration. Admis. □

Exemple 3.67.
Considérons la translation de vecteur $(1,1)$ dans $\mathbb{C}$:

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}, \\ z & \mapsto & z+(1+i) \end{array}$$

ainsi que la translation de vecteur $(-1,-1)$ dans $\mathbb{C}$:

$$g \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}. \\ z & \mapsto & z-(1+i) \end{array}$$



Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(g(z)) = f\big(z-(1+i)\big) = \big(z-(1+i)\big)+(1+i) = z,$$

et

$$g(f(z)) = g\big(z+(1+i)\big) = \big(z+(1+i)\big)-(1+i) = z.$$

Donc, f est bijective et $f^{-1} = g$.

Exemple 3.68. Soit f l'application :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^\star \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

Définissons :

$$g \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^\star & \to & \mathbb{N}. \\ x & \mapsto & x-1 \end{array}$$

Alors, on vérifie aisément que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^\star}$. Donc, f est bijective et $f^{-1} = g$.

Remarque 3.69. Il faut vérifier les deux conditions $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$ pour montrer que f est bijective. En effet, prenons :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+, \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad g \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

Pourtant, ni f ni g ne sont bijectives.

Proposition 3.70

Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$ deux applications bijectives. Alors, $g \circ f$ est bijective et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

III Ensembles finis

Définition 3.71. Un ensemble E est dit **fini** s'il existe un entier n ainsi qu'une bijection de E dans $[\![1,n]\!]$.

Remarque 3.72. Par convention, on dira aussi que l'ensemble vide est fini.

29 Démontrer que l'ensemble $\{a,b,c\}$ est fini.

Définition 3.73. Un ensemble est dit **infini** s'il n'est pas fini.

Exemple 3.74. $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont infinis.

Propriété 3.75. Si un ensemble E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$ et $[\![1,m]\!]$, alors $n = m$.

Définition 3.76. Le **cardinal** d'un ensemble fini E est l'entier n de la définition 3.71. On le note $\text{Card}(E)$ (ou $\sharp E$ ou $|E|$). On convient que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

Exemple 3.77. L'ensemble $\{a,b,c\}$ est de cardinal 3.

Proposition 3.78

Soient E un ensemble **fini** et A et B deux parties de E. Alors :

(i) A et B sont finis de cardinal inférieur à $\text{Card}(E)$;

(ii) $A = E \Leftrightarrow \text{Card}(A) = \text{Card}(E)$;

(iii) $\text{Card}(E \backslash A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$;

(iv) $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$;

(v) $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A)\text{Card}(B)$.

Démonstration. Admis. □

Méthode. Pour montrer que deux parties A et B d'un ensemble fini E sont égales, on pourra montrer que $A \subset B$ et que $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$.

Proposition 3.79

Soient E un ensemble fini et $A_1, \dots, A_N$ une famille de sous-ensembles de E disjoints deux à deux. Alors :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Card}(A_i).$$

Démonstration. Admis. □

IV Dénombrement

Dans tout ce qui suit, n et p désigent deux entiers vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$, et E désigne un ensemble à n éléments.

IV.1 Arrangements

Définition 3.80. Un **arrangement** de p éléments (ou un p-**arrangement**) de E est une liste ordonnée de p éléments de E deux à deux distincts.

Exemple 3.81. Soit $E = \{1; 2; 3\}$. Les arrangements de 2 éléments de E sont :

$$(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2).$$

Proposition 3.82

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de p-arrangements de E est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Exemple 3.83. Combien y a-t-il de numéros de téléphone à 5 chiffres dont tous les chiffres sont distincts ?

$$A_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 30240.$$

Exemple 3.84. Combien y a-t-il de podiums possibles lors d'une course avec 8 athlètes ?

$$A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 336.$$

IV.2 Combinaisons

Définition 3.85. Une **combinaison** de E à p éléments est un sous-ensemble de E à p éléments.

Exemple 3.86. Soit $E = \{a, b, c\}$. Les combinaisons de E à 2 éléments sont :

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}.$$

Ici, l'ordre ne compte pas.

Proposition 3.87

Soient E un ensemble de cardinal n et $p \leqslant n$. Le nombre de combinaisons à p éléments de E est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

30 Au loto, on tire 6 boules numérotées parmi 49. Combien y a-t-il d'issues possibles ?

IV.3 Ensemble des parties

Proposition 3.88

Soit E un ensemble de cardinal n, alors :

$$\mathrm{Card}\,(\mathscr{P}(E)) = 2^n.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Compétences à acquérir dans ce chapitre

Voici une liste des compétences principales attendues pour ce chapitre. N'hésitez pas à solliciter vos enseignants de TD pour vous proposer des exercices portant sur les compétences vous posant le plus de problème.

- Écrire un nombre complexe sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
- Maîtriser le lien entre les opérations sur les nombres complexes et la géométrie du plan.
- Se rappeler les formules de Moivre et d'Euler.
- Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe.
- Résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
- Déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe.
- Linéariser ou développer une expression faisant intervenir des sinus et/ou des cosinus.

I Premières définitions

Théorème 4.1

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ ainsi qu'un élément i vérifiant :

(i) $i^2 = -1$;

(ii) tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme $a+ib$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;

(iii) les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$ prolongent celles existant déjà sur $\mathbb{R}$ en conservant leurs propriétés.

Remarque 4.2. On peut construire l'ensemble $\mathbb{C}$ en l'identifiant au plan. On définit alors l'addition de deux points du plan (a,b) et (a',b') de manière classique et leur multiplication de la manière suivante :

$$(a,b) \times (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b),$$

qui correspond évidemment au produit que l'on connaît :

$$(a+ib)(a'+ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b).$$

Il faut ensuite vérifier toutes les propriétés usuelles de ces opérations (associativité, distributivité, commutativité, etc...).

Définitions 4.3. L'écriture $z = a + ib$ est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z. Les réels a et b sont appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** de z. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Propriétés 4.4. Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

(i) $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$;

(ii) $\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

Démonstration. Exercice. □

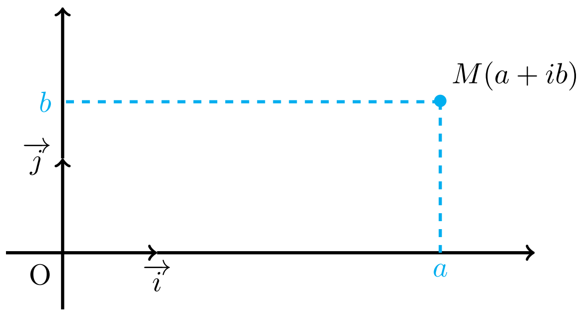
I.1 Représentation géométrique des nombres complexes

Dans tout ce qui suit, on munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 4.5. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **point d'affixe** z le point M de coordonnées (a, b), où $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. On note souvent $M(z)$.

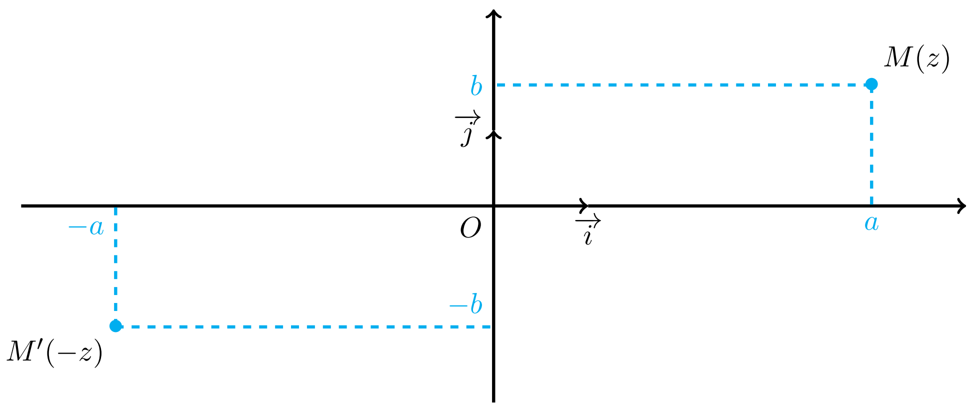
Remarque 4.6. Cette définition permet d'identifier le plan à $\mathbb{C}$.

Illustration 4.7.



Propriété 4.8. Si M est le point d'affixe z, alors le point M' d'affixe $-z$ est le symétrique de M par rapport à O.

Illustration 4.9.

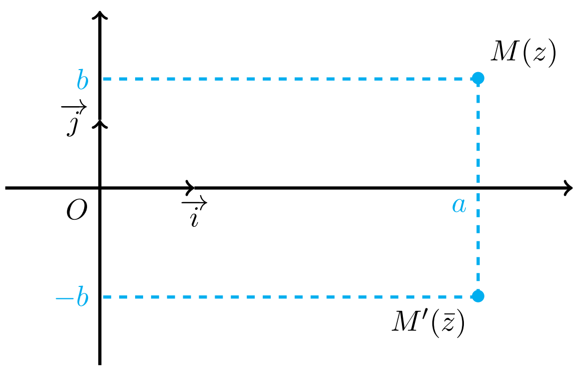


I.2 Conjugaison

Définition 4.10. Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $a - ib$.

Propriété 4.11. Si M est le point d'affixe z, alors le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.

Illustration 4.12.



Proposition 4.13

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

(i) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

(ii) $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$;

(iii) Si $z \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$;

(iv) $\overline{\overline{z}} = z$.

Démonstration. Exercice. □

I.3 Module d'un nombre complexe

Définition 4.14. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On appelle **module** de z et on note $|z|$ le nombre réel positif :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque 4.15. Soit M le point d'affixe z. Alors, $|z|$ correspond à la longueur OM.

Propriété 4.16

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, $|z|^2 = z\overline{z}$.

Démonstration. Exercice. □

Propriété 4.17. Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B, alors :

$$AB = |z_B - z_A|.$$

Proposition 4.18

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

(i) $|zz'| = |z||z'|$;

(ii) $|z| = |\overline{z}|$;

(iii) Si $z \neq 0$ alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$;

(iv) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

(v) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Démonstration. Les points (i) à (iv) sont laissés à titre d'exercice. Le point (v) est admis. □

I.4 Exponentielle imaginaire

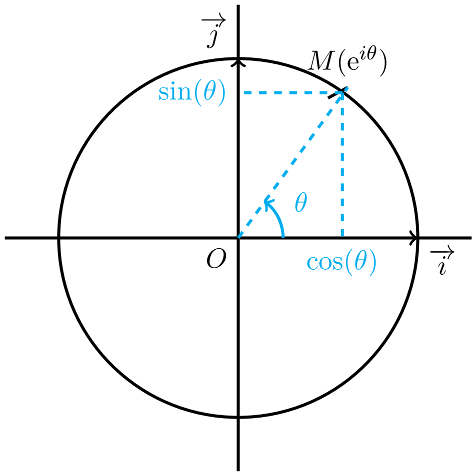
Définition 4.19. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Remarque 4.20. Le point d'affixe $e^{i\theta}$ se situe sur le cercle unité. Rappelons que le cercle unité est l'ensemble des points situés à une distance 1 de l'origine. Or, si M est d'affixe $e^{i\theta}$ alors :

$$OM = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1.$$

Illustration 4.21.



Exemples 4.22. $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{-i\pi/6} = \sqrt{3}/2 - i/2$.

Proposition 4.23

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 4.24. Soient a, b et c trois nombres réels. La notation $a \equiv b\,[c]$ signifie que a et b sont égaux à un multiple (positif ou négatif) de c près, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kc$.

Proposition 4.25

Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'\,[2\pi].$$

Démonstration. Exercice : on pourra passer en coordonnées cartésiennes et identifier parties réelles et parties imaginaires. □

Proposition 4.26

Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}.$$

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 4.27 (Formule de Moivre)

Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\left(e^{i\theta}\right)^k = e^{ik\theta}.$$

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{N}$: démonstration par récurrence laissée en exercice. □

Remarque 4.28. Attention ! Cette formule n'est valable que pour $k \in \mathbb{Z}$. En effet, pour $k = \frac{1}{2}$ et $\theta = 2\pi$, on a $\left(e^{i\theta}\right)^k \neq e^{ik\theta}$ puisque :
$$\begin{cases} \left(e^{i\theta}\right)^k = \left(e^{i2\pi}\right)^{1/2} = 1 \\ e^{ik\theta} = e^{i\pi} = -1. \end{cases}$$

Proposition 4.29 (Formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

I.5 Argument d'un nombre complexe non nul

Théorème 4.30

Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, il existe un réel θ unique à 2π près tel que :
$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

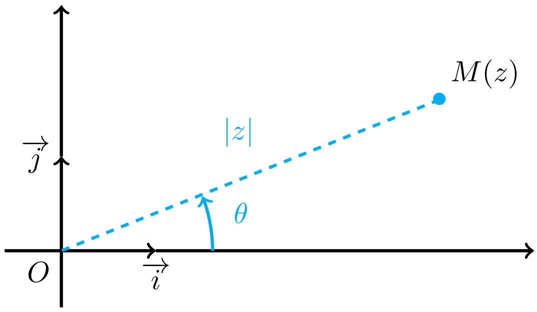
Démonstration. Admis. □

Définition 4.31. Tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé **argument** de z et on note $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Remarque 4.32. Le théorème 4.30 signifie que si θ est un argument de z, alors l'ensemble des arguments de z est l'ensemble des réels θ' qui s'écrivent $\theta' \equiv \theta\ [2\pi]$.

Remarque 4.33. Si M est le point d'affixe z, alors $\arg(z) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})\ [2\pi]$.

Illustration 4.34.



Exemple 4.35. $\arg(-1) \equiv \arg(\mathrm{e}^{i\pi}) \equiv \pi\ [2\pi]$.

Exemple 4.36. Déterminons un argument du nombre complexe $z = 1 + i$. On a :

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Donc :

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}.$$

Ainsi :

$$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

Remarque 4.37. Attention ! L'argument du complexe $z = -\mathrm{e}^{i\pi/2}$ **n'est pas** $\pi/2$. En effet :

$$-\mathrm{e}^{i\pi/2} = \mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{i\pi/2} = \mathrm{e}^{i(\pi+\pi/2)} = \mathrm{e}^{i3\pi/2}, \quad \arg\left(-\mathrm{e}^{i\pi/2}\right) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi].$$

31 Déterminer $\arg(1 + i\sqrt{3})$.

Définition 4.38. Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et θ un argument de z. Posons $r = |z|$. L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée **forme exponentielle** (ou **forme polaire**) de z.

Exemple 4.39. En reprenant les calculs effectués à l'exemple 4.36, on obtient :

$$1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}.$$

32 Écrire $1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle.

Proposition 4.40

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$. Alors :

(i) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;

(ii) $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;

(iii) $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$;

(iv) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;

(v) $\forall k \in \mathbb{Z}, \arg(z^k) \equiv k\arg(z)\ [2\pi]$.

Démonstration. Les deux premiers points seront démontrés en classe. Les autres sont laissés à titre d'exercice. □

Proposition 4.41

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$. Alors :

(i) $\arg(z) \equiv 0\ [\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;

(ii) $z = z' \Leftrightarrow \big(|z| = |z'| \text{ et } \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]\big)$.

Démonstration. Admis. □

Proposition 4.42

Soient A, B, C et D quatre points 2 à 2 distincts et d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Alors :

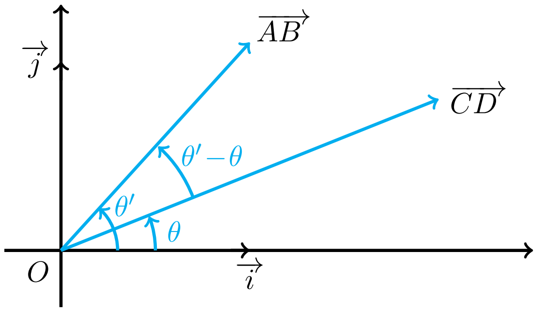
$$\arg(z_B - z_A) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}})\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}})\ [2\pi].$$

Démonstration. Admis. □

Illustration 4.43. La première propriété traduit le fait que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont, en terme d'affixe, $z_B - z_A$. De plus, d'après les propriétés des arguments, on sait que :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = \arg(z_B - z_A) - \arg(z_D - z_C)\ [2\pi].$$

La deuxième propriété traduit donc le fait que l'angle entre CD et AB s'écrit comme une différence. Pour l'illustrer, on a placé les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ à l'origine.



$$\arg(z_B - z_A) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \theta'\ [2\pi]$$

$$\arg(z_D - z_C) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD}}) \equiv \theta\ [2\pi]$$

II Résolution d'équations

II.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Proposition 4.44

Soit $\Delta \in \mathbb{C}^\star$. Alors, il existe exactement deux nombres complexes δ et $-\delta$ tels que $\delta^2 = \Delta$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Définition 4.45. Un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$ est appelé **une racine carrée** de Δ.

Remarque 4.46. Soit x un nombre réel positif. On définit **la** racine carrée de x comme étant **le** nombre réel positif qui, élevé au carré, vaut x. Ce **choix** permet d'écrire :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Cependant, pour un nombre négatif (ou un nombre complexe), il n'y a pas de choix satisfaisant. En effet, si on pouvait définir une fonction racine carrée sur $\mathbb{C}$ compatible avec le produit, alors on pourrait écrire :

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1;$$

ce qui est impossible. La fonction racine carrée n'est donc pas définie sur $\mathbb{C}$ et écrire $\sqrt{\Delta}$ pour un nombre qui n'est pas positif **n'a pas de sens**.

Attention. Ne jamais écrire :

$$\text{«soit } \delta = \sqrt{\Delta}\text{»} \qquad \text{ou} \qquad \text{«soit } \delta^2 = \Delta\text{».}$$

Exemple 4.47. Déterminons les racines carrées de $\Delta = 1+i$. Une méthode consiste à écrire Δ sous forme exponentielle :

$$\Delta = \sqrt{2}(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}.$$

Ainsi, les racines carrées de Δ sont :

$$\delta_1 = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/8} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/8} = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{i\pi/8} = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{i9\pi/8}.$$

Une autre méthode consiste à poser $\delta = a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et à résoudre l'équation $\delta^2 = \Delta$. On a :

$$\delta^2 = 1+i \iff \begin{cases} |\delta|^2 = |1+i| \\ a^2 + i2ab - b^2 = 1+i \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+b^2 = \sqrt{2} \\ a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = \sqrt{2}+1 \\ 2b^2 = \sqrt{2}-1 \\ 2ab = 1 \end{cases}.$$

La troisième équation permet de dire que a et b sont de même signe. On en déduit que les deux racines carrées de Δ sont :

$$\delta_1 = \sqrt{(\sqrt{2}+1)/2} + i\sqrt{(\sqrt{2}-1)/2} \quad \text{et} \quad -\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2} - i\sqrt{(\sqrt{2}-1)/2}.$$

33 À partir de cet exemple, déterminer la valeur de $\cos(\pi/8)$.

34 Déterminer les racines carrées de $\Delta = 8+6i$.

II.2 Équations du second degré à coefficients complexes

Théorème 4.48

Soient $a \in \mathbb{C}^\star$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$. On considère l'équation :

$$(E) : az^2 + bz + c = 0.$$

On appelle **discriminant** de (E) le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

(i) Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une solution (dite **double**) donnée par :

$$z = \frac{-b}{2a}.$$

(ii) Si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet deux solutions données par :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a},$$

où δ est un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Remarque 4.49. Soient δ et $-\delta$ les deux racines carrées de Δ. Alors, si on choisit $-\delta$ à la place de δ, les rôles de z_1 et de z_2 sont échangés. On obtient donc bien les mêmes solutions.

Exemple 4.50. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 + 1 = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = 0 - 4 = -4$. Posons $\delta = 2i$. Alors, $\delta^2 = \Delta$. Les solutions de (E) sont donc :

$$z_1 = \frac{-0 - 2i}{2} = -i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-0 + 2i}{2} = i.$$

35 Résoudre l'équation d'inconnue z donnée ci-dessous :

$$z^2 - (1 + i)z - 2 - i = 0.$$

II.3 Racines n-ièmes

II.3.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 4.51. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On appelle **racine n-ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Exemple 4.52. $\mathbb{U}_1 = \{1\}$ et $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$.

Exemple 4.53. Quels sont les racines quatrièmes de l'unité ? On résout :

$$z^4 = 1.$$

On sait que :

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i).$$

On en déduit qu'il y a 4 racines qui sont 1, -1, i et $-i$. Donc $\mathbb{U}_4 = \{1; -1; i; -i\}$.

Remarque 4.54. Cette méthode ne fonctionne que dans des cas très particuliers. En effet, comment résoudre, par exemple, $z^7 = 1$?

36 En écrivant z sous forme exponentielle et en identifiant modules et arguments, résoudre l'équation $z^7 = 1$.

Théorème 4.55

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Les racines n-ièmes de l'unité sont les n nombres complexes deux à deux distincts $\omega_0, \cdots, \omega_{n-1}$ définis par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \omega_k = \mathrm{e}^{i2k\pi/n}.$$

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

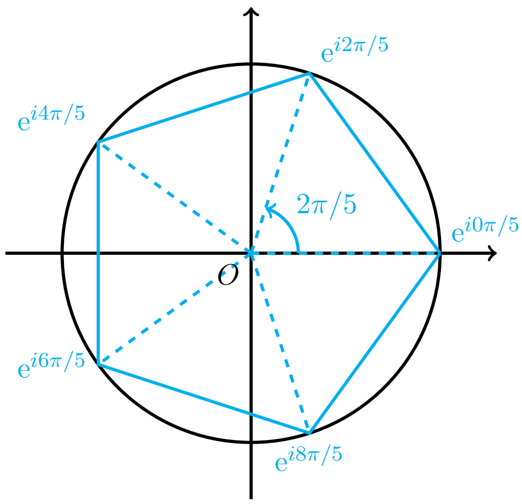
Exemple 4.56. Les racines cubiques de l'unité sont 1, $\mathrm{e}^{i2\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{i4\pi/3}$.

Proposition 4.57

Notons $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ les n racines de l'unité comme dans le théorème précédent et $M_0, \ldots, M_{n-1}$ les points correspondants dans le plan complexe. Alors, $M_0 M_1 \ldots M_{n-1}$ est un n-gone régulier de centre O.

Démonstration. Nous la ferons en classe. □

Illustration 4.58. Pour $n = 5$, on obtient un pentagone.



II.3.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soit $a \in \mathbb{C}^\star$. Déterminer les racines n-ièmes de a, c'est déterminer les solutions de l'équation :

$$z^n = a.$$

Pour ce faire, on procède comme dans la démonstration du théorème portant sur les racines n-ièmes de l'unité.

Exemple 4.59. Déterminons les racines cubiques de $\alpha = 12 - i12\sqrt{3}$. Commençons par écrire α sous forme polaire :

$$12 - i12\sqrt{3} = 24\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 24\,e^{-i\pi/3}.$$

Soit $z = \rho\,e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$. Alors $z^3 = \rho^3\,e^{i3\theta}$ et donc :

$$z^3 = 12 - i12\sqrt{3} \iff \begin{cases} \rho^3 = 24 \\ 3\theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 2\sqrt[3]{3} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}.$$

On prend alors trois valeurs consécutives de k dans l'équation ci-dessus et on en déduit que les racines cubiques de $12 - i12\sqrt{3}$ sont :

$$2\sqrt[3]{3}\,e^{-i\pi/9}, \quad 2\sqrt[3]{3}\,e^{i5\pi/9} \quad \text{et} \quad 2\sqrt[3]{3}\,e^{i11\pi/9}.$$

37 Déterminer les racines quatrièmes de $1 - i$.

Théorème 4.60

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a \in \mathbb{C}^\star$. Les racines n-ièmes de a sont les n nombres complexes deux à deux distincts :
$$\zeta_k = |a|^{1/n} \mathrm{e}^{i(\arg(a)+2k\pi)/n}, \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

Démonstration. Très bon exercice : s'inspirer de l'exemple 4.59. □

Remarque 4.61. Ce résultat n'est pas à connaître par cœur. Il vous sera demandé de reproduire le raisonnement présenté dans l'exemple 4.59.

III Formules trigonométriques

III.1 Linéarisation d'une expression

Linéariser une expression, c'est la mettre sous forme d'une somme. Pour nous, il s'agira de transformer un produit de cosinus et de sinus en une somme. Pour ce faire, on utilisera les formules d'Euler.

Exemple 4.62. Supposons que l'on veuille linéariser l'expression $\cos(x)^2 \sin(x)$. On utilise alors les formules d'Euler, on développe le produit, puis on regroupe les exponentielles d'arguments opposés pour utiliser à nouveau les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)\sin(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{8i}\left(\mathrm{e}^{i2x}+2+\mathrm{e}^{-i2x}\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}\right) \\
&= \frac{1}{8i}\left(\mathrm{e}^{i3x}-\mathrm{e}^{ix}+2\mathrm{e}^{ix}-2\mathrm{e}^{-ix}+\mathrm{e}^{-ix}-\mathrm{e}^{-i3x}\right) \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{e}^{i3x}-\mathrm{e}^{-i3x}}{2i}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i} \\
&= \frac{1}{4}(\sin(3x)+\sin(x)).
\end{aligned}$$

38 Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos(x)\sin(x)$ à l'aide de la méthode précédente et retrouver la formule de trigonométrie usuelle correspondante.

III.2 Développement d'un sinus ou d'un cosinus

À l'aide de la formule de Moivre, on peut développer les expressions du type $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$ et les exprimer en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

Exemple 4.63. Exprimons $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$ en utilisant la formule de de Moivre. On a :
$$\mathrm{e}^{i3\theta} = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^3,$$
i.e.
$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta) = \big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\big)^3.$$
En développant le membre de droite à l'aide de la formule du binôme, on trouve que :
$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta) = \cos^3(\theta)+3i\cos^2(\theta)\sin(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-i\sin^3(\theta).$$

D'où, en identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$$
$$\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta).$$

39 Exprimer $\sin(2\theta)$ à l'aide de $\sin(\theta)$ et de $\cos(\theta)$ en utilisant la méthode précédente.

IV Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 4.64. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On définit l'**exponentielle** de z comme étant le nombre :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^a \left(\cos(b) + i\sin(b)\right).$$

Exemple 4.65. Soit $z = \ln(2) + i\pi/4$, alors :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\ln 2}\mathrm{e}^{i\pi/4} = 2\mathrm{e}^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

Remarque 4.66. Si z est un réel, $z = a + i0$, alors :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{i0} = \mathrm{e}^a.$$

De même, si z est imaginaire pur, $z = 0 + ib$, alors :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^0 \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{ib}.$$

La fonction exponentielle ainsi définie **prolonge** donc la fonction exponentielle réelle ainsi que la fonction exponentielle imaginaire. C'est pourquoi on note souvent e^z plutôt que $\exp(z)$.

Proposition 4.67

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

(i) $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}$;

(ii) $\overline{(\mathrm{e}^z)} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$;

(iii) $\mathrm{e}^z \neq 0$;

(iv) $\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$.

Démonstration. Nous la ferons en cours. □

Exemple 4.68. Résolvons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E) : \mathrm{e}^z = 1 + i.$$

Notons $z = a + ib$ et écrivons $1 + i$ sous forme trigonométrique :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}.$$

Donc :

$$\mathrm{e}^z = 1 + i \Leftrightarrow \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{ib} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(\sqrt{2}) \\ y \equiv \pi/4\,[2\pi] \end{cases}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est donné par :

$$S = \left\{\frac{\ln(2)}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

40 Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{C}$ de l'équation

$$\mathrm{e}^z + \frac{1}{\mathrm{e}^z} = 0.$$

Attention. La fonction ln n'est pas définie sur $\mathbb{C}$. On ne peut donc **pas écrire** :

$$\mathrm{e}^z = 1 + i \Leftrightarrow z = \ln(1+i).$$

Proposition 4.69

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = z' + 2ik\pi.$$

Démonstration. Exercice. $\square$