Mathématiques générales - MTA1/MTA2
Tronc Commun
Final - Automne 2014

L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Le barème donné est susceptible d'être modifié.

Chaque exercice est à rédiger sur une copie à part.

Exercice 1 (Analyse : 10 points)**.**
Soit f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x + \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et donner $f'_d(0)$. On pourra utiliser l'équivalent suivant :
$$e^x - 1 - x \underset{(x\to 0)}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$
3. Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et donner $f'_g(0)$.
4. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
5. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
6. Dresser le tableau de variations de f. On pourra utiliser le résultat suivant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x(x-1) + 1 \geqslant 0.$$
7. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Déterminer l'équation de l'asymptote Δ à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
   (b) Déterminer les positions relatives de Δ et de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.
   (c) Détermier l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1.
   (d) Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$: on prendra soin de représenter tous les éléments étudiés dans l'énoncé. On prendra pour unité graphique 2cm.
   Indication : $e \simeq 2,72$.
8. Montrer que f est bijective (on ne demande pas de déterminer f^{-1}).
9. Tracer l'allure de la courbe représentative de f^{-1} sur le dessin précédent.

Pensez à changer de copie

Exercice 2 (Matrices : 5 points).

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$ où I_3 représente la matrice identité.

1. Calculer B^2 et B^3. En déduire B^n pour $n \geq 3$.
2. Développer $(I_3 + B)^n$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pensez à changer de copie

Exercice 3 (Polynômes : 5 points).
On considère le polynôme à coefficients réels :

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1.$$

On admet que ce polynôme admet une racine complexe, non réelle et double notée α ($\alpha \notin \mathbb{R}$). Le but de cet exercice est de déterminer α.

1. Que peut-on dire de $P(\alpha)$ et de $P'(\alpha)$?
2. En déduire que $\overline{\alpha}$ est aussi une racine double de P.
3. Montrer que la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est donnée par :

$$P(X) = (X - \alpha)^2 (X - \overline{\alpha})^2.$$

4. En déduire la factorisation de $P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Exprimer $P(0)$ en fonction de $|\alpha|$ et en déduire $|\alpha|$.
6. Développer l'expression donnée à la question 3 et déterminer α (ou $\overline{\alpha}$).

Correction

Correction de l'exercice 1.

1. Rappelons que par définition, f est continue en 0 si :
$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$
Or
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x),$$
puisque, au voisinage de 0 :
$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \sim_0 \frac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$
Ainsi, f est bien continue en 0.
2. Calculons le taux d'accroissement de f en 0^+. Soit $h > 0$, alors :
$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} - 1}{h} = \frac{\mathrm{e}^h - 1 - h}{h^2} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^2/2}{h^2} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
Ainsi, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1/2$.
3. La dérivabilité à gauche en 0 de f ne pose pas de problème puisque la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ est une fonction usuelle de classe $\mathcal{C}^\infty$. Or :
$$\forall x < 0, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{(1-x)^2},$$
donc $f'_g(0) = 2$.
4. On déduit des deux questions précédentes que f n'est pas dérivable en 0 puisque les dérivées à gauche et à droite en 0 ne coïncident pas.
5. On remarque que :
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$
où la deuxième limite est obtenue à l'aide du théorème de croissances comparées.
6. On a déjà calculé la dérivée de f sur $\mathbb{R}_-^\star$. Calculons-la sur $\mathbb{R}_+^\star$:
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1}{x^2}.$$
On en déduit (en utilisant l'indication de l'énoncé) que :
$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) > 0.$$
Comme f' est strictement positive sauf en un nombre fini de points, f est strictement croissante. On peut maintenant dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$
variations de f	$-\infty \nearrow +\infty$

7. (a) Rappelons que, pour tout $x < 0$:

$$f(x) = x + \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi, la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ puisque :

$$f(x) - x = \frac{1}{1-x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Soit $x \leqslant 0$. Alors :

$$f(x) - x = \frac{1}{1-x} > 0.$$

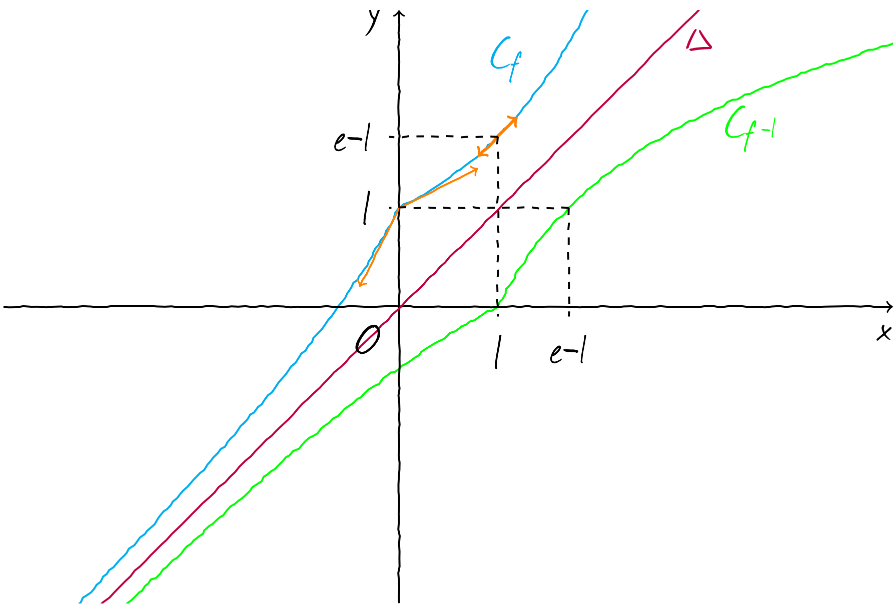
Donc, $\mathscr{C}_f$ se trouve au-dessus de Δ sur $]-\infty, 0]$.

(c) Soit T la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1. Alors, d'après le cours, l'équation de T est donnée par :

$$y = f(1) + (x-1)f'(1).$$

Donc, T a pour équation $y = \mathrm{e} - 2 + x$.

(d) Sur le graphe, on doit faire apparaître tout ce qui a été vu précédemment, à savoir : les dérivées à droite et à gauche en 0, l'asymptote Δ et la tangente T. On a aussi tracé ici la courbe représentative de f^{-1} pour répondre à la dernière question.



8. La fonction f est strictement croissante. Elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$. De plus, d'après le tableau de variations, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2.

1. Après calculs, on obtient :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que :

$$\forall k \geqslant 3, \quad B^k = \mathbb{O}_3.$$

2. On peut appliquer la formule du binôme car les matrices I_3 et B commutent (i.e. $I_3 B = B I_3$). On a alors :

$$(B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k}.$$

3. Pour $n = 0$ on a $A^0 = I_3$ et pour $n = 1$, $A^1 = A$. Soit $n \geqslant 2$, alors :

$$A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2.$$

   Finalement :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 3.

1. Comme α est une racine double, on sait d'après le cours que :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0.$$

2. le polynôme P est à coefficients réels. On sait dans ce cas que si α est une racine complexe de P, alors il en est de même pour $\overline{\alpha}$. En appliquant le même argument à P', on en déduit que $\overline{\alpha}$ est racine double de P.
3. P est un polynôme de degré 4 admettant pour racines doubles α et $\overline{\alpha}$. On en déduit immédiatement que :

$$P(X) = (X - \alpha)^2 (X - \overline{\alpha})^2.$$

   Attention : le coefficient dominant de P ne doit pas être omis lors de l'écriture sous forme factorisée (ici il vaut 1).
4. La factorisation de P sur $\mathbb{R}[X]$ est obtenue en regroupant les racines conjuguées de P. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X) &= ((X - \alpha)(X - \overline{\alpha}))^2 \\ &= \left((X^2 - (\alpha + \overline{\alpha})X + \alpha\overline{\alpha}\right)^2 \\ &= (X^2 - 2\mathcal{R}\text{e}(\alpha)X + |\alpha|^2) \cdot (X^2 - 2\mathcal{R}\text{e}(\alpha)X + |\alpha|^2). \end{aligned}$$

5. En utilisant l'expression factorisée de P donnée à la question 3, on trouve :

$$P(0) = (0-\alpha)^2(0-\overline{\alpha})^2 = (\alpha\overline{\alpha})^2 = |\alpha|^4$$

Or, $P(0) = 0$ par définition de P. On en déduit que $|\alpha| = 1$ (car c'est un nombre réel positif).

6. En développant l'expression donnée à la question 3, on trouve :

$$P(X) = X^4 - 4\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)X^3 + (2|\alpha|^2 + 4\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)^2)X^2 - 4\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)|\alpha|^2 X + |\alpha|^4.$$

Par identification avec les coefficients du polynôme P, on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} -4\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha) = -2 \\ 2|\alpha|^2 + 4\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)^2 = 3 \\ -4\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha)|\alpha|^2 = -2 \\ |\alpha|^4 = 1 \end{cases}$$

On en déduit alors que $\mathcal{R}\mathrm{e}(\alpha) = 1/2$ puis que $\mathcal{I}\mathrm{m}(\alpha) = \pm\sqrt{3}/2$.