MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES - MTA1/MTA2
TRONC COMMUN
MÉDIAN - AUTOMNE 2014

L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Le barème donné est susceptible d'être modifié.

Chaque exercice est à rédiger sur une copie à part.

Exercice 1 (question de cours : 5 points)**.**

1. Énoncer soigneusement la formule du binôme de Newton.
2. On rappelle la formule ci-dessous valable pour tous les entiers naturels non nuls k et n tels que $k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

   Démontrer alors la formule du binôme par récurrence.
3. Soit n un entier naturel. En calculant de deux manières différentes la somme $\sum_{k=0}^{k=n} \left((k+1)^3 - k^3\right)$, en déduire la valeur de la somme $S = \sum_{k=0}^{k=n} k^2$.

Pensez à changer de copie

Exercice 2 (nombres complexes : 5 points)**.**
Soient n un entier naturel fixé, et $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On souhaite résoudre sur I l'équation :

$$(E)\ :\quad \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = 0.$$

1. Justifier que cette équation est bien définie sur I.
2. (a) Soit $x \in I$, vérifier que $\dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos(x)} \neq 1$.

   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{\mathrm{e}^{ikx}}{\cos^k(x)}$ (on pourra faire apparaître la somme des termes d'une suite géométrique).

   (c) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x) \times \cos^n(x)}$$

3. Donner toutes les solutions de (E) sur I.

Pensez à changer de copie

Exercice 3 (suites : 10 points)**.**

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissante telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général donné par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k,$$

ainsi que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} u_n = S_{2n}, \\ v_n = S_{2n+1}. \end{cases}$$

(a) Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

(b) En déduire que la suite $(S_n)_n$ converge.

2. Soit $(b_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} b_0 = -\dfrac{1}{2}, \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad b_{n+1} = \sin(b_n) + \lfloor b_n \rfloor + 1, \end{cases}$$

où $\lfloor b_n \rfloor$ désigne la partie entière de b_n. On admettra l'inégalité ci-dessous que l'on pourra utiliser dans la suite de l'exercice :

$$\forall x\in[-1,0[,\quad \sin(x) > x.$$

(a) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad -1 \leqslant b_n < 0.$$

(b) En déduire une expression simplifiée de b_{n+1} en fonction de b_n.

(c) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(d) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

(e) Montrer que la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} b_k$$

est convergente.

Correction

Correction de l'exercice 1.

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et $n\in\mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

2. Remarquons que la formule est vraie pour $n=0$ puisque :

$$(a+b)^0=1=\binom{0}{0}a^0b^0.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que la formule est vraie au rang n. Alors :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=(a+b)(a+b)^n\\&=(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} && \text{(par hypothèse)}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1}b^{n+1-k}\\&=a^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n+1}b^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1}b^{n+1-k}+b^{n+1}.\end{aligned}$$

Effectuons un changement d'indice dans la première somme en posant $p=k+1$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p-1}a^pb^{n+1-p}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n+1-k}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{n+1-k}+b^{n+1}\\&=a^k+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}+b^{n+1}\\&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1}b^{n+1-k},\end{aligned}$$

puisque les coefficients binomiaux correspondant à $k=0$ et à $k=n+1$ sont égaux à 1. D'où le résultat par récurrence.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. D'une part :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)&=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=0}^{n}k^3\\&=\sum_{k=1}^{n+1}k^3-\sum_{k=0}^{n}k^3\\&=(n+1)^3-0^3\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(k^3+3k^2+3k+1-k^3\right)\\ &= 3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1\\ &= 3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\end{aligned}$$

Ainsi, en isolant la somme et après simplification :

$$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Correction de l'exercice 2.

1. Comme $I=]0,\frac{\pi}{2}[$, il est immédiat que :

$$\forall x\in I,\quad \cos(x)\neq 0.$$

   L'équation est donc bien définie sur I.

2. (a) Soit $x\in I$, alors :

$$\frac{e^{ix}}{\cos(x)}=\frac{\cos(x)+i\sin(x)}{\cos(x)}=1+i\tan(x)\neq 1.$$

   (b) On remarque que :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

   où $q=\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\neq 1$. Or :

$$\begin{aligned}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} &= \frac{1-\dfrac{e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1}(x)}}{1-\dfrac{e^{ix}}{\cos(x)}}\\ &= \frac{\dfrac{\cos^{n+1}(x)-e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1}(x)}}{\dfrac{\cos(x)-e^{ix}}{\cos(x)}}\\ &= \frac{\cos^{n+1}(x)-\cos((n+1)x)-i\sin((n+1)x)}{-i\sin(x)\cos^n(x)}\\ &= \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)\times\cos^n(x)}+i\frac{\cos^{n+1}(x)-\cos((n+1)x)}{\sin(x)\times\cos^n(x)}\end{aligned}$$

   (c) D'après le calcul précédent, en identifiant les parties réelles, on obtient exactement le résultat demandé.

3. $x \in I$ est solution de (E) si et seulement si :

$$\sin((n+1)x) = 0.$$

Or :

$$\sin((n+1)x = 0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, (n+1)x = k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k\pi}{n+1}.$$

Dans plus, comme on résout (E) sur I, on a aussi :

$$0 < \frac{k\pi}{n+1} < \frac{\pi}{2} \iff 0 < k < \frac{n+1}{2}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est donné par :

$$S = \left\{ \frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z} \cap]0,(n+1)/2[\right\}.$$

Correction de l'exercice 3.

1. (a) Pour montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, il faut montrer que l'une est croissante, que l'autre est décroissante et que la différence des deux tend vers 0. Soit alors $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k a_k.$$

Or :

$$\sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k a_k = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant 0$$

car la suite (a_n) est décroissante. On montre de la même manière que :

$$v_{n+1} - v_n = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0.$$

Enfin,

$$v_n - u_n = -a_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car la suite $(a_n)_n$ tend vers 0 en $+\infty$ et que $(a_{2n+1})_n$ est une suite extraite de $(a_n)_n$.

(b) Comme (u_n) et $(v_n)_n$ sont adjacentes, elles admettent la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Ainsi, la sous-suite des termes paires de $(S_n)_n$ et la sous-suite des termes impairs de $(S_n)_n$ ayant la même limite ℓ, on peut en conclure que $(S_n)_n$ converge vers ℓ.

2. (a) Notons pour tout n entier naturel :

$$P(n) : -1 \leqslant b_n < 0.$$

Comme $b_0 = -1/2$, $P(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. D'une part :

$$-1 \leqslant b_n < 0 \Longrightarrow \lfloor b_n \rfloor = -1$$

Ainsi :

$$b_{n+1} = \sin(b_n) + \lfloor b_n \rfloor + 1 = \sin(b_n)$$

D'autre part, d'après l'énoncé :

$$-1 \leqslant b_n < 0 \Longrightarrow b_n < \sin(b_n) < 0,$$

où l'inégalité de droite découle des propriétés de la fonction sinus sur $[-1,0[$. On en déduit que $P(n+1)$ est vraie et donc le résultat demandé est vrai par récurrence.

(b) D'après la question précédente, comme $b_n \in [-1,0[$, sa partie entière vaut -1 et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n).$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, d'après l'indication donnée dans l'énoncé :

$$b_{n+1} - b_n = \sin(b_n) - b_n > 0.$$

La suite $(b_n)_n$ est donc (strictement) croissante.

(d) D'après le théorème de convergence monotone, $(b_n)_n$ étant croissante et majorée (par 0), elle converge. Notons ℓ sa limite. Par continuité de la fonction sinus et d'après la relation trouvée à la question 2.(b), on a :

$$\sin(\ell) = \ell.$$

Or, d'après l'indication de l'énoncé, cette équation n'a pas de solution sur $[-1,0[$. De plus, d'après la question 2.(a), on sait que la limite de $(b_n)_n$ est un élément de $[-1,0]$. Finalement, $\ell = 0$.

(e) Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -b_n.$$

Alors, $(a_n)_n$ est une suite décroissante de nombre positif et qui tend vers 0 en $+\infty$. D'après la première partie de l'exercice, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

converge. Or :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} b_k,$$

d'où le résultat.