Final MT21 2013

Note : *Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main. La plupart des questions sont indépendantes, vous pouvez admettre les résultats non démontrés pour traiter les questions suivantes. La note tiendra compte de votre rédaction, alors soignez-la !*

Exercice 1. On considère la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t), \\ y(t) = \dfrac{\cos^2(t)}{2-\cos(t)}. \end{cases}$$

1. Calculer $x(t+2\pi)$ et $y(t+2\pi)$. En déduire que l'on peut réduire le domaine d'étude à $[-\pi, \pi]$.
2. Calculer $x(-t)$ et $y(-t)$. En déduire que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que l'on peut réduire le domaine d'étude à $[0, \pi]$.
3. Établir le tableau de variations de x et de y sur $[0, \pi]$.
4. Déterminer les points singuliers éventuels de la courbe paramétrée ainsi que leurs types. Indications éventuellement utiles :

$$y''(0) = -3,\ y'''(0) = 0,\ y''(\pi/3) = 25/18,\ y'''(\pi/3) = 7\sqrt{3}/18,$$
$$y''(\pi/2) = 1,\ y'''(\pi/2) = -3/2,\ y''(\pi) = -5/9,\ y'''(\pi) = 0.$$

5. Tracer la courbe.

Exercice 2. On considère l'application f définie par

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & X & \mapsto & AX, \end{array}$$

où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit encore I_3 la matrice identité et P le polynôme :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3).$$

1. Simplifier l'expression de P et démontrer que les deux seules racines de P sont 1 et 2.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\operatorname{Ker}(A - I_3)$.
3. Déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$.
4. Montrer que $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Déterminer $\operatorname{Im}(f)$.
7. Déterminer $\dim(\operatorname{Ker}(f))$.
8. L'application f est-elle bijective ?

Exercice 3. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. À l'aide du théorème du rang, montrer que f ne peut pas être surjective.
2. De même, montrer que g ne peut pas être injective.

Correction

Correction de l'exercice 1.

1. Par périodicité des fonctions cosinus et sinus, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad : \quad \begin{cases} x(t+2\pi) = x(t), \\ y(t+2\pi) = y(t). \end{cases}$$

   On peut donc se contenter d'étudier les fonctions sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$.

2. Par imparité de la fonction sinus, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad : \quad x(-t) = -x(t).$$

   De plus, par parité de la fonction cosinus :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad : \quad y(-t) = y(t).$$

   On peut donc réduire le domaine d'étude à l'intervalle $[0, \pi]$ et le reste de la courbe sera obtenu par symétrie axiale suivant l'axe des ordonnées.

3. Soit $t \in [0, \pi]$, alors

$$x'(t) = \cos(t),$$

   et

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{-2\cos(t)\sin(t)(2-\cos(t)) - \cos^2(t)\sin(t)}{(2-\cos(t))^2} \\ &= \frac{\cos(t)\sin(t)(\cos(t)-4)}{(2-\cos(t))^2} \end{aligned}$$

   D'où le tableau de variations suivant :

t	0		$\pi/2$		π
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	0

4. Soit $t \in [0, \pi]$, alors :

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(t) = 0 \\ \cos(t)\sin(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

   Après calculs, on trouve :

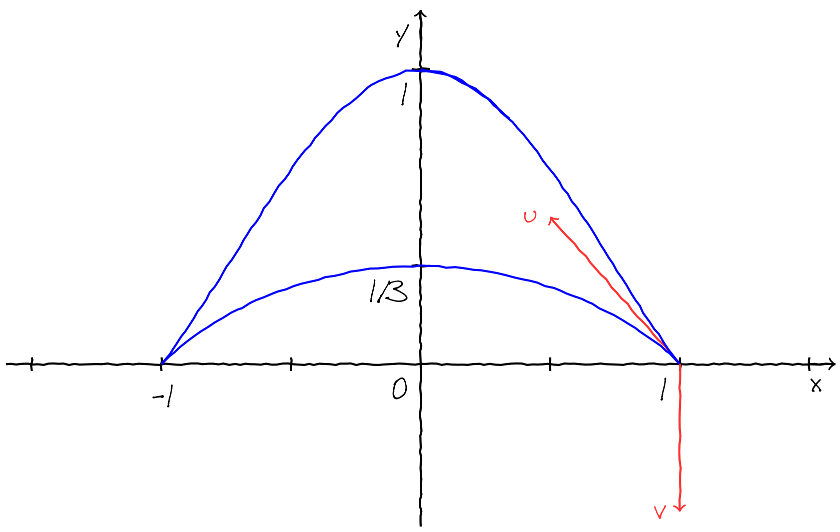
$$u = \begin{pmatrix} x''(\pi/2) \\ y''(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   et

$$v = \begin{pmatrix} x'''(\pi/2) \\ y'''(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

   On est dans le cas où $p = 2$ est pair et où $q = 3$ est impair : il s'agit donc d'un point de rebroussement de première espèce.

5. Finalement, on peut tracer l'allure de la courbe :



Correction de l'exercice 2.

1. Après calculs, on trouve :

$$P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2).$$

2. Pour déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_3)$, on résout l'équation $(A - I_3)X = 0$. On trouve :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(A - I_3) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ z = x - y \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Ces deux vecteurs étant non colinéaires, une base de l'espace $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ est $((1, 0, 1), (0, 1, -1))$.

3. On procède comme à la question précédente et on trouve que $\mathscr{B}_2 = ((2, 2, 1))$ convient.
4. Pour montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la déterminant de $\mathscr{B}$ est non nul. Or :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

5. D'après les calculs qui précèdent, si on note e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de la base $\mathscr{B}$, alors :

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = e_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = 2e_3,$$

d'où le résultat.

6. On sait que $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par les vecteurs colonne de la matrice de f dans n'importe quelle base. On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^3.$$

7. D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 3 = 0.$$

8. On déduit de la question précédente que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Ainsi, f est injective. Elle est donc aussi bijective puisque ses espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension. Il s'agit bien d'un automorphisme.

Correction de l'exercice 3. On a :

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}(f)) &= 3 - \dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant 1, \\ \dim(\mathrm{Im}(g)) &= 2 - \dim(\mathrm{Ker}(g)) \leqslant 2.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\mathrm{Im}(g) \neq \mathbb{R}^3$.