Devoir Surveillé numéro 1

Note : *Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main. La note tiendra compte de votre rédaction, alors soignez-la !*

Exercice 1. On considère l'équation différentielle ci-dessous sur $\mathbb{R}_+^\star$:

$$(E)\ :\ ty''(t) - (1+2t)y'(t) + (1+t)y(t) = 0.$$

1. Vérifier que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est une solution de (E).
2. Déterminer à l'aide de la méthode de Lagrange une autre solution de (E).
3. Vérifier que ces deux solutions sont linéairement indépendantes.
4. Donner la solution générale de (E).

Exercice 2. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -4x + 3y, \\ y' = -6x + 5y. \end{cases}$$

Correction

Correction de l'exercice 1. La méthode de Lagrange conduit à l'équation différentielle :

$$x\lambda''(x) = \lambda'(x).$$

On en déduit donc que $\lambda'(x) = 2x$ convient, puis que $\lambda(x) = x^2$ convient et enfin qu'une solution de (E) est donnée par $y_1(x) = x^2 e^x$. On vérifie que les solutions sont linéairement indépendantes à l'aide du wronskien ou en citant le cours. La solution générale de (E) est alors donnée par :

$$y(x) = \lambda e^x + \mu x^2 e^x, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$