Devoir Surveillé numéro 1

Note : *Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main. La note tiendra compte de votre rédaction, alors soignez-la !*

Exercice 1. On considère l'équation différentielle ci-dessous sur $\mathbb{R}_+^\star$:

$$(E)\ :\ t^2y''(t) + ty'(t) - y(t) = 6t^2.$$

1. Montrer que $y_1(t) = t$ et $y_2(t) = 1/t$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée.
2. Déterminer la solution générale de (E).

Exercice 2. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = 4y_1 + y_2. \end{cases}$$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^\star$:

$$(E)\ :\ t^2y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = 0.$$

1. Montrer $t \mapsto 1/t$ est une solution de (E).
2. Résoudre (E).

Correction très succincte

Correction de l'exercice 1. On vérifie facilement que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène. De plus, en calculant le wronskien de y_1 et de y_2 en 1 on trouve :

$$w(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

ce qui démontre que les solutions sont linéairement indépendantes. Pour résoudre (E), on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2. Après résolution d'un petit système, on remarque que $t \mapsto 2t^2$ convient. La solution générale de (E) est alors donnée par :

$$y(t) = \lambda_1 t + \lambda_2 \frac{1}{t} + 2t^2, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$$

Correction de l'exercice 3. Vérifier que $t \mapsto 1/t$ est solution est très simple. On applique ensuite la méthode de Lagrange pour trouver une deuxième solution de (E), linéairement indépendante de la première. Après calculs, on montre que $t \mapsto \ln(t)/t$ convient.