Médian MT28 - Printemps 2013

Note : *Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main. La note tiendra compte de votre rédaction, alors soignez-la !*

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle ci-dessous et préciser les solutions maximales :

$$(E) : \quad y' \mathrm{e}^y = x.$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = \max(x, 0), \qquad \text{sur } I = \mathbb{R}.$$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire, déterminer la solution générale de :
$$(E_1) : y' + y = x, \qquad \text{sur } I_1 = [0, +\infty[.$$
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^-$, c'est-à-dire, déterminer la solution générale de :
$$(E_2) : y' + y = 0, \qquad \text{sur } I_2 =]-\infty, 0].$$
3. En déduire la solution générale de (E). On prendra soin de bien justifier que la fonction donnée est dérivable en 0.

Exercice 3. Lorsque l'on étudie un système régi par une équation différentielle, il peut être intéressant de pouvoir retrouver l'état initial du système à partir de son état actuel. Considérons le problème de Cauchy :

$$(S) : \quad \begin{cases} z' = f(t, z), \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

où f est supposée être de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Nous allons chercher à écrire un schéma permettant de donner une approximation de $z(-T)$ en partant de $z(0)$.

1. Rappeler pourquoi (S) admet une unique solution. On la notera z dans la suite.
2. Soit $h > 0$, $y_0 = z_0$ et $(t_n)_n$ la suite définie par $t_n = -hn$. En intégrant l'équation différentielle $(E) : z' = f(t, z)$ sur $[-h, 0]$ et en appliquant la méthode des rectangles à droite, montrer que l'on peut approcher z_1 par :
$$y_1 = y_0 - hf(t_0, y_0).$$
3. Réitérer la méthode vue à la question précédente sur $[-2h, -h]$ et donner une approximation y_2 de $z_2 = z(t_2)$ en fonction de y_1.
4. Donner un schéma numérique en vous inspirant des questions précédentes.
5. Sans faire de calcul, donner l'ordre de convergence auquel on peut s'attendre.

Exercice 4. On considère la méthode de quadrature Σ donnée par :

$$\Sigma(f) = (\beta - \alpha)\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{2(\alpha + \beta)}{3}\right)\right),$$

pour l'approximation de l'intégrale d'une fonction f sur $[\alpha, \beta]$.

1. Démontrer que Σ est exacte sur $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Donner un schéma numérique inspiré de Σ pour la résolution de :
$$(S) : \quad \begin{cases} z' = f(t, z), \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$
On pourra utiliser la méthode d'Euler pour approcher les quantités $y_{n+1/3}$ et $y_{n+2/3}$.