Médian MT28 - Printemps 2014

Note : *Calculatrices autorisées. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main. La note tiendra compte de votre rédaction, alors soignez-la !*

Exercice 1. La méthode de Milne pour l'approximation de l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[\alpha,\beta]$ est donnée par :

$$I(f)=\frac{\beta-\alpha}{3}\left(2f\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{4}\right)-f\left(\alpha+2\frac{\beta-\alpha}{4}\right)+2f\left(\alpha+3\frac{\beta-\alpha}{4}\right)\right)\simeq\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que cette méthode est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. On admettra qu'elle est encore exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Appliquer la méthode de Milne pour approcher l'intégrale :
$$\int_0^1 x^4\mathrm{d}x.$$
Que peut-on en conclure ?
3. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^4$. On admet que l'erreur effectuée par la méthode pour l'intégration de f sur $[a,b]$ est majorée par :
$$\frac{7(\beta-\alpha)^5}{23040}M,$$
où M est un majorant de $f^{(4)}$. On découpe l'intervalle $[\alpha,\beta]$ en n sous-intervalles de taille $(\beta-\alpha)/n$.
   (a) Effectuer un dessin dans le cadre de la méthode des rectangles à gauche pour expliquer le principe du découpage.
   (b) Montrer que l'erreur dans la méthode de Milne est alors majorée par :
$$\frac{7(\beta-\alpha)^5}{23040n^4}M.$$
   (c) Application numérique. Comment doit-on choisir n pour approcher l'intégrale de $f: x\mapsto \mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$ à 10^{-3} près ?

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y^{(3)}(t)+y'(t)=t^2+2.$$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ \begin{cases} z'=t,\\ z(0)=0,\end{cases}$$

que l'on cherche à résoudre sur $[0,1]$.

1. Déterminer la solution exacte z de (E).
2. Écrire le schéma d'Euler explicite correspondant à la résolution de (E). On notera $(y_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ la suite correspondante.
3. Calculer y_0, y_1 et y_2.
4. Montrer par récurrence que :
$$\forall n\leqslant N,\quad y_n=\frac{1}{N^2}\times\frac{n(n-1)}{2}.$$
5. Comparer avec la solution exacte. Quelle est l'erreur commise ?
6. L'erreur converge-t-elle vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$? Est-ce étonnant ?