Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y + x$ avec $y(0) = 1$ sur $\mathbb{R}$;
2. $y' = \cos x + y$ sur $\mathbb{R}$;
3. $y' + 2y = (x-2)^2$ sur $\mathbb{R}$.
4. $y' + 2x^2 y = x^2$ sur $]0, +\infty[$ avec $y(1) = 1$.

Exercice 2. Pour chacune des équations différentielles qui suit, écrire la solution passant par le point M et tracer sommairement le graphe de la solution.

1. $y' + 2xy = 0, \quad M = (0,1)$, sur $]0, +\infty[$;
2. $y' + y\tan x = \sin x \cos x \quad M = (\frac{\pi}{4}, 0)$, sur $]-\pi/2, \pi/2[$;

Exercice 3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -x + 3y + \mathrm{e}^t \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$$

Exercice 5. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + 8y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + y + \mathrm{e}^{-3t} \end{cases}$$

Exercice 6. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 7. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = -6x - 2y + 5z \\ y' = x + y - z \\ z' = -7x - 2y + 6z \end{cases}$$

sachant que $A = PTP^{-1}$, où :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^\star$ l'équation différentielle

$$(E) \;:\; t^3 y'' + ty' - y = 0.$$

On pourra chercher une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme de degré 1.

Exercice 10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \;:\; (t^2+1)y'' - 2y = t,$$

en commençant par rechercher un polynôme unitaire de degré 2 solution de (E).

Exercice 11. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^\star$ l'équation différentielle

$$(E) \;:\; t^2 y'' + ty' - y = 1.$$

Exercice 12. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y = x^3 + x^2$;
2. $y'' - 2y' + y = e^x$;
3. $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$ où $m \in \mathbb{R}$;
4. $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2\cos x + (x^3 + 3)$.

Exercice 13. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$;
2. $y^{(3)} + 2y^{(2)} - y^{(1)} - 2y = 0$;

3. $y^{(3)} - y^{(2)} - y^{(1)} + y = 0$;
4. $y^{(3)} + y^{(2)} + y^{(1)} + y = 0$;

Exercice 14. On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 6y' + 9y = d(x) \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) lorsque, respectivement, on pose :
$$d(x) = (x^2+1)e^{-3x} \quad \text{et} \quad d(x) = \cos x.$$
3. Donner la forme générale des solutions de (E) lorsque :
$$d(x) = 2(x^2+1)e^{-3x} + 50\cos x.$$

Exercice 15. Déterminer une équation différentielle admettant $(r-2)^2 = 0$ comme équation caractéristique et $e^x + (x^3/6)e^{2x}$ comme solution particulière.

Exercice 16. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2}.$$

Exercice 17. a) Résoudre sur tout intervalle

$$y' + \mathrm{e}^{x-y} = 0.$$

b) Préciser les solutions maximales.

Exercice 18. a) Résoudre sur tout intervalle

$$xy' - (y^2+1) = 0.$$

b) Préciser les solutions maximales.

Exercice 19. a) Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation

$$E : y' = 2x(1+y^2).$$

b) Préciser les solutions maximales

Exercice 20. Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation

$$yy' - y' = \mathrm{e}^x.$$

Exercice 21. Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation

$$yy' = x.$$

Exercice 22. Résoudre l'équation différentielle

$$y' = 1 + y^2$$

Exercice 23. Résoudre sur tout intervalle

$$y' + \mathrm{e}^y = 0.$$

Exercice 24. Résoudre sur tout intervalle

$$y' \sin y = -1.$$

Exercice 25. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y' = |y|.$$