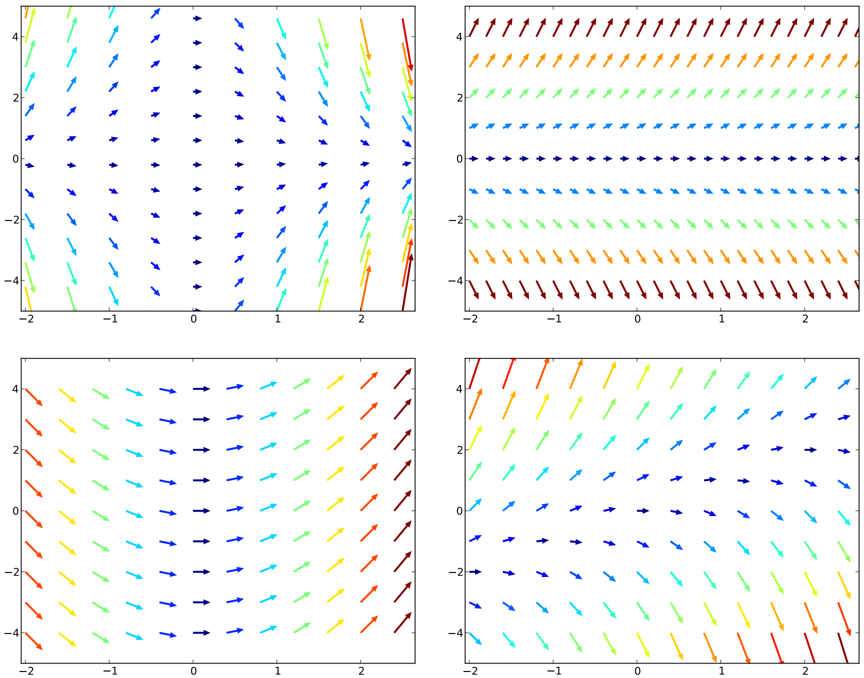
Exercice 1. Associer à chaque équation différentielle son champ de vecteurs :

$$y' = y, \quad y' = -ty, \quad y' = y - x, \quad y' = x$$



Exercice 2. On rappelle qu'une *méthode de quadrature* pour l'approximation de l'intégrale d'une fonction entre α et β est une application de la forme :

$$\begin{array}{rccc} I & : & \mathscr{C}([\alpha,\beta]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longmapsto & (\beta-\alpha)\displaystyle\sum_{j=0}^{l}\omega_j f(\xi_j), \end{array}$$

où les ξ_j sont des éléments de $[\alpha,\beta]$ et où les *poids* ω_j vérifient $\sum_{j=0}^{l}\omega_j = 1$.

1. Démontrer qu'une méthode de quadrature est une application linéaire.
2. En déduire qu'une méthode de quadrature est exacte sur $\mathbb{R}_N[X]$ si et seulement si elle est exacte pour les fonctions $x \mapsto x^p$, $0 \leqslant p \leqslant N$.

Exercice 3. On a vu en cours que la méthode de Simpson était exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer qu'elle est encore exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$ mais pas sur $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 4. Effectuer une intégration par parties en posant $u = f$ et $v = x - (\alpha+\beta)/2$ dans :

$$I = \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x.$$

Effectuer une deuxième intégration par parties en posant $u = f'$ et $v = (x-\alpha)(x-\beta)$ et retrouver la majoration de l'erreur dans la méthode des trapèzes vue en cours.

Exercice 5. Soit $f \in \mathscr{C}^4([\alpha,\beta])$ et $h = 1/n$.

1. Déterminer une condition sur n pour obtenir une approximation à ε près de $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ (on distinguera suivant les différentes méthodes de quadrature vues en cours).
2. Application numérique : $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $b = 3$ et $\varepsilon = 10^{-4}$.

Exercice 6. On se propose de construire une méthode de quadrature pour l'approximation de $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ où f est une fonction dérivable. On pose :

$$I(f) = af(0) + bf'(1) + cf(2).$$

1. Quelle équation a, b et c doivent-ils satisfaire pour que la méthode soit exacte pour la fonction $x \mapsto 1$?
2. Déterminer et résoudre un système d'équation que doivent satisfaire a, b et c pour que la méthode soit exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$.
3. En déduire une approximation de $\int_0^3 1/(1+x)\mathrm{d}x$. Quelle est l'erreur commise ?
4. Quels sont les inconvénients de cette méthode ?

Exercice 7. on considère l'équation différentielle ci-dessous :

$$(E)\ :\quad \begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On rappelle la formule :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t,y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t)) + f(t,y(t))\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t)).$$

1. À l'aide de la formule de Taylor, retrouver le schéma numérique :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n,y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n,y_n) + f(t_n,y_n)\frac{\partial f}{\partial y}(t_n,y_n)\right).$$

2. Quel avantage présente-t-il par rapport au schéma d'Euler explicite ?
3. Quel est son défaut principal ?

Exercice 8. Appliquer le schéma de l'exercice précédent à l'équation différentielle :

$$(E)\ :\quad \begin{cases} y' = -y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

En déduire l'expression de y_n en fonction de n et comparer avec le résultat obtenu en cours pour le schéma d'Euler explicite.

Exercice 9. on considère l'équation différentielle ci-dessous :

$$(E)\ :\quad \begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Soit $\theta \in [0,1]$. Le θ-*schéma* est donné par :

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta f(t_n,y_n) + (1-\theta) f(t_{n+1},y_{n+1})).$$

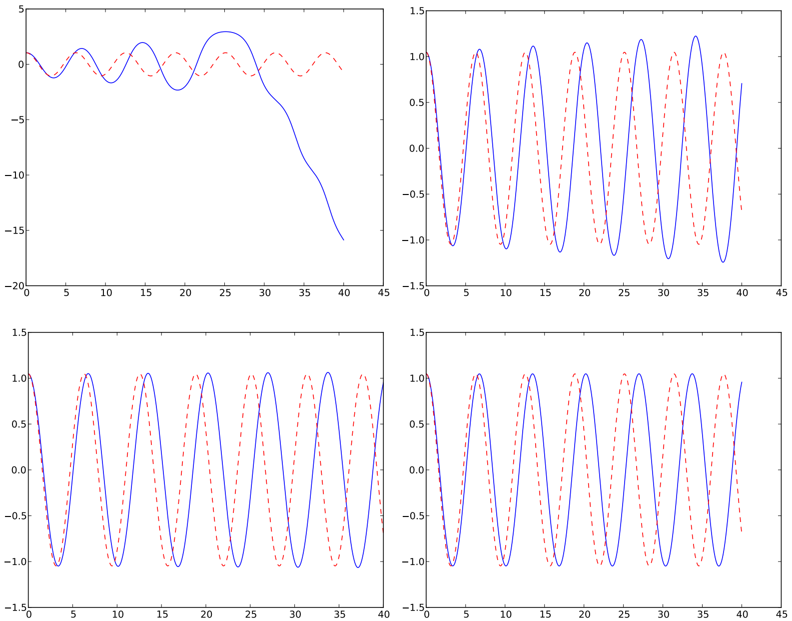
1. Quels schémas reconnaît-on pour $\theta = 0$, $1/2$ et 1 ?
2. En supposant que f vérifie les hypothèses du cours, majorer l'erreur de consistance, c'est-à-dire l'erreur faite sur un pas en partant de la valeur exacte de la solution.

Exercice 10. On s'intéresse à l'équation différentielle du pendule simple :

$$(E)\ :\ \theta''(t) + \omega_0^2 \sin(\theta(t)) = 0,$$

où θ désigne l'angle entre l'axe des ordonnées et la tige du pendule et où $\omega_0^2 = g/l$, l désignant la longueur de la tige.

1. Pour des petites oscillations, on remplace souvent $\sin(\theta)$ par θ dans (E). Résoudre alors (E) en faisant cette approximation et en prenant pour conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$.
2. Réécrire l'équation (E) comme une équation différentielle du premier ordre en la variable $Y = (\theta, \theta')$.
3. Mettre en place un schéma d'Euler explicite pour la résolution de (E).
4. On a tracé le résultat du schéma déterminé à la question précédente pour $\theta_0 = \pi/3$ et pour différentes valeurs du pas h : 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} et 10^{-4}. Sur la même figure, on a tracé en pointillés la solution approchée de (E) trouvée à la question 1. Interpréter ces résultats.



Correction de l'exercice 1. De gauche à droite $y' = -ty$, $y' = y$, $y' = x$ et $y' = y - x$.

Correction de l'exercice 2. Soit $(f, g, \lambda) \in (\mathscr{C}([\alpha, \beta]))^2 \times \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} I(\lambda f + g) &= (\beta - \alpha) \sum_{j=0}^{l} \omega_j (\lambda f + g)(\xi_j) \\ &= \lambda(\beta - \alpha) \sum_{j=0}^{l} \omega_j f(\xi_j) + (\beta - \alpha) \sum_{j=0}^{l} \omega_j g(\xi_j) \\ &= \lambda I(f) + I(g). \end{aligned}$$

Une méthode est *exacte* sur $\mathbb{R}_N[X]$ si et seulement si l'erreur est nulle pour les polynômes de degré inférieur à N. Or :

$$I\left(x \mapsto \sum_{k=0}^{N} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{N} a_k I(x \mapsto x^k) = \sum_{k=0}^{N} a_k \int_\alpha^\beta x^k \mathrm{d}x.$$

Donc :

$$I\left(x \mapsto \sum_{k=0}^{N} a_k x^k\right) = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{k=0}^{N} a_k x^k\right) \mathrm{d}x.$$

Correction de l'exercice 3. La méthode de Simpson est donnée par la formule :

$$I_S(f) = \frac{\beta - \alpha}{6} \left(f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta)\right).$$

D'après l'exercice précédent, il suffit de montrer qu'elle est exacte pour $x \mapsto x^3$ mais pas pour $x \mapsto x^4$. Or :

$$\int_\alpha^\beta x^3 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_\alpha^\beta = \frac{\beta - \alpha}{4} \left(\beta^3 + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \alpha^3\right).$$

Et, la formule de quadrature donne :

$$I_S(x \mapsto x^3) = \frac{\beta - \alpha}{6} \left(\alpha^3 + 4\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3 + \beta^3\right),$$

d'où le résultat après simplification. Pour ce qui est du degré 4, on a :

$$\int_\alpha^\beta x^4 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_\alpha^\beta = \frac{\beta - \alpha}{5} \left(\beta^4 + \alpha\beta^3 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta + \alpha^4\right).$$

Cependant, la formule de quadrature donne après calculs :

$$I_S(x \mapsto x^4) = \frac{\beta - \alpha}{24} \left(5\beta^4 + 4\alpha\beta^3 + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^3\beta + 5\alpha^4\right).$$

Correction de l'exercice 4. La première intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} I &= \left[f(x)\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= (\beta - \alpha)\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f'(x)(2x - \alpha - \beta)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

La première partie correspondant à l'approximation par la méthode des trapèzes. Il s'agit donc de majorer l'intégrale restante pour obtenir une majoration de l'erreur. En effectuant à nouveau une intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f'(x)(2x - \alpha - \beta)\mathrm{d}x &= \left[f'(x)(x - \alpha)(x - \beta)\right]_\alpha^\beta \\ &\quad - \int_\alpha^\beta f''(x)(x - \alpha)(x - \beta)\mathrm{d}x \\ &= 0 - \int_\alpha^\beta f''(x)(x - \alpha)(x - \beta)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On peut donc majorer l'erreur par :

$$\frac{M}{2}\int_\alpha^\beta |x - \alpha| \cdot |x - \beta| \mathrm{d}x = \frac{M}{2}\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(\beta - x)\mathrm{d}x,$$

où M est un majorant de $|f''|$ sur $[\alpha, \beta]$. De plus, le calcul de l'intégrale donne :

$$\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(\beta - x)\mathrm{d}x = \frac{(\beta - \alpha)^3}{6}.$$

Correction de l'exercice 5. Il suffit de reprendre les formules vues en cours. Par exemple, pour la méthode du point-milieu, cela correspond à :

$$\frac{M}{24n^2}(\beta-\alpha)^3 \leqslant \varepsilon,$$

où M est un majorant de f'' sur $[\alpha,\beta]$, soit

$$n \geqslant \sqrt{\frac{M}{24\varepsilon}(\beta-\alpha)^3}.$$

Application numérique dans le cas de la fonction exponentielle et de la méthode du point-milieu :

$$n \geqslant 100\sqrt{\frac{\mathrm{e}^3}{24}2^3} \simeq 259.$$

Application numérique dans le cas de la fonction racine carrée et de la méthode du point-milieu :

$$n \geqslant 100\sqrt{\frac{1/4}{24}2^3} \simeq 29.$$

Correction de l'exercice 6. Pour que la méthode soit exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$, il faut et il suffit qu'elle soit exacte pour les fonctions $x \mapsto x^p$, où $0 \leqslant p \leqslant 3$. Pour $p = 0$, cela conduit à :

$$\int_0^3 1\mathrm{d}x = 3 = a \times 1 + b \times 0 + c \times 1.$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} a+c=3 \\ b+2c=9/2 \\ 2b+4c=9 \\ 3b+8c=81/4 \end{cases}$$

Les lignes 2 et 3 sont proportionnelles. Après résolution, on trouve :

$$a=-\frac{3}{8}, \quad b=-\frac{9}{4} \quad \text{et} \quad c=\frac{27}{8}.$$

Appliquée à la fonction $x \mapsto 1/(1+x)$, la formule de quadrature donne $21/16$, là où l'intégrale vaut en fait $\ln(2)$, soit une erreur d'approximativement $0,62$.

Cette méthode pose deux problèmes majeurs. Le premier est qu'il faut être capable de calculer $f'(1)$ pour l'utiliser, ce qui n'est pas toujours le cas. Le deuxième est qu'on ne peut pas *a priori* extrapoler la méthode à un intervalle quelconque sans changer les valeurs de a, b et c.

Correction de l'exercice 7. D'après la formule de Taylor :

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + o(h^2).$$

Il suffit alors de se souvenir que $y' = f(t,y(t))$ et d'appliquer la formule de l'énoncé pour remplacer y''. On trouve alors directement le schéma de l'énoncé. Ce schéma est plus précis que le schéma d'Euler puisque ce dernier correspond au développement de Taylor à l'ordre 1. Cependant, il nécessite le calcul de dérivées partielles de f qui n'est pas toujours possible et qui peut être coûteux en temps.

Correction de l'exercice 8. On applique la formule de l'exercice précédent et on trouve :

$$y_{n+1} = y_n - hy_n + \frac{h^2}{2}(0-y_n).$$

D'où :

$$y_n = \left(1-h+\frac{h^2}{2}\right)^n.$$

Le schéma d'Euler explicite donne quant à lui :

$$y_n' = (1-h)^n.$$

Correction de l'exercice 9. On reconnaît respectivement les schémas d'Euler explicite, de Heun et d'Euler implicite. Soit z la solution de l'équation différentielle. L'erreur de consistance est par définition :

$$\begin{aligned} z_n - \widetilde{y}_n &= z_n - (y_n + h(\theta f(t_n, y_n) + (1-\theta) f(t_{n+1}, y_{n+1}))) \\ &= \theta(z_n - y_n - hf(t_n, y_n)) + (1-\theta)(z_n - y_n - f(t_{n+1}, y_{n+1}). \end{aligned}$$

On voit apparaître les erreurs de consistance des schémas d'Euler implicites et explicites qui sont majorées par $Mh^2/2$, où M est un majorant de z'.

Correction de l'exercice 10. La solution de l'approximation de (E) est donnée par :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t).$$

Avec les notations de l'énoncé $Y' = F(Y)$, où :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (v, \sin(u)) \end{array}$$

D'où le schéma d'Euler explicite :

$$\begin{cases} Y_0 = (\theta_0, 0), \\ Y_{n+1} = Y_n + hF(Y_n). \end{cases}$$

La taille des oscillations augmente sur les deux premiers graphiques, ce qui ne devrait pas être le cas et qui est dû à un choix de h trop grand. Ce phénomène disparaît sur les graphiques suivants. De plus, θ_0 étant « grand », il est normal d'observer une différence avec la solution approchée.