MTB

Algèbre et Analyse

Intégration - Algèbre linéaire
Développements limités
Fonctions de deux variables

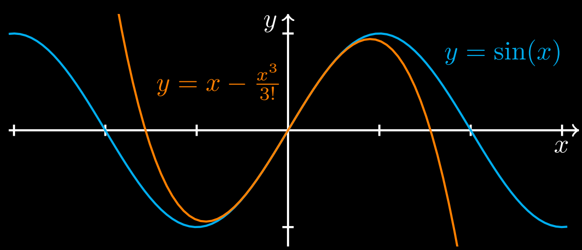
Alexis Flesch

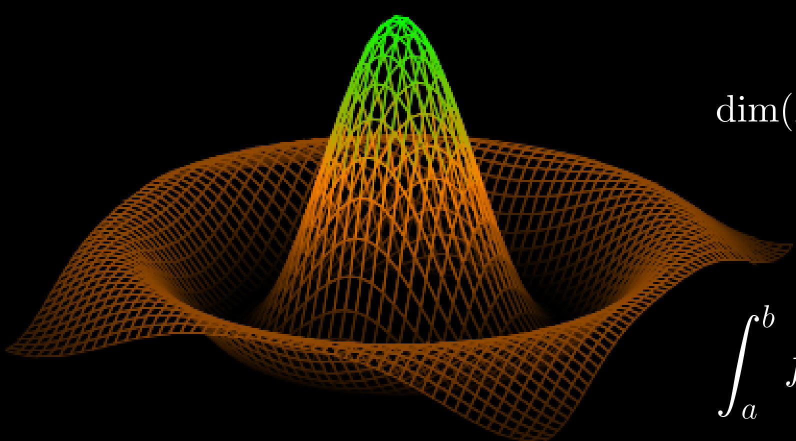
Karine Mauffrey

Printemps 2019

Version étudiant

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$





$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

Table des matières

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- résoudre des systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss,
- effectuer des sommes et produits de matrices,
- appliquer rigoureusement la formule du binôme de Newton sur les matrices,
- étudier l'inversibilité d'une matrice et déterminer son inverse le cas échéant,
- utiliser les propriétés des suites récurrentes pour déterminer la puissance n-ième d'une matrice.

I Systèmes linéaires

I.1 Reconnaître un système linéaire

Définition 1.1.

- Un **système linéaire de n équations à p inconnues** $x_1, x_2, \ldots, x_p$ est un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

  où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des nombres (réels ou complexes) donnés.
- On appelle **solution** de ce système tout p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ qui vérifie toutes les équations du système.

Exemple 1.2. Un exemple de système à deux équations et trois inconnues :

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 12. \end{cases}$$

Proposition 1.3

Un système linéaire admet soit une solution unique, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Définition 1.4. On dit que deux systèmes linéaires sont **équivalents** lorsqu'ils ont les mêmes inconnues et les mêmes solutions.

I.2 Systèmes linéaires échelonnés

Définition 1.5. Un **système linéaire échelonné** est un système pouvant s'écrire sous forme «triangulaire» (quitte à renuméroter les inconnues) :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \qquad\quad a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

avec $p \geqslant n$. Les inconnues figurant en début de ligne (ici x_1, x_2, …, x_n) sont appelées **inconnues principales**. Les inconnues non principales sont appelées **inconnues auxiliaires**.

Exemple 1.6. Le système ci-dessous est échelonné :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ \quad\quad\; y + z = 1. \end{cases}$$

Remarque 1.7. Pour résoudre un système linéaire échelonné, on exprime les inconnues principales en fonction des inconnues auxiliaires (si il y en a) en partant de la dernière équation, puis on remonte en effectuant des substitutions.

Exemple 1.8. Reprenons le système de l'exemple précédent. On exprime les solutions en fonction de z.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 3(1-z) - z = 0 \\ y = 1 - z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = (4z-3)/2 \\ y = 1 - z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2z - 3/2 \\ y = 1 - z \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par :

$$\left\{ \left(2z - \frac{3}{2}, 1 - z, z\right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque 1.9. On aurait pu aussi choisir d'exprimer x et z en fonction de y. L'ensemble des solutions aurait alors été écrit différemment mais il aurait contenu exactement les mêmes éléments.

I.3 Le pivot de Gauss

Dans tout ce qui suit, nous noterons L_i la i-ème équation d'un système linéaire.

Théorème 1.10

Partant d'un système linéaire quelconque, on obtient un système linéaire équivalent en lui appliquant l'une des opérations suivantes :

(i) permutation de deux lignes L_i et L_j ($L_i \leftrightarrow L_j$),

(ii) multiplication d'une ligne L_i par $a \neq 0$ ($L_i \leftarrow aL_i$),

(iii) addition à une ligne L_i d'un multiple aL_j d'une autre ligne L_j ($L_i \leftarrow L_i + aL_j$).

Corollaire 1.11

Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné.

Lorsque l'on veut résoudre un système linéaire, on commence par échelonner ce système. Pour cela, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss décrit ci-dessous.

Méthode (Pivot de Gauss). Mettre en oeuvre l'algorithme du pivot de Gauss sur un système linéaire

$$(S) \ : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1, & L_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2, & L_2 \\ \quad\quad\quad\quad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n, & L_n \end{cases}$$

consiste à :

- **étape 1 :**
  — si besoin, permuter deux inconnues ou effectuer une ou des opérations élémentaires sur les lignes du système (parmi celles présentées dans le théorème 1.10) pour que le nouveau coefficient $a'_{1,1}$ devant la nouvelle première inconnue x'_1 soit non nul (et si possible égal à 1). On transforme dans ce cas le système (S) en un nouveau système équivalent :

$$(S') \ : \ \left\{\begin{array}{rl} a'_{1,1}x'_1 + a'_{1,2}x'_2 + \ldots + a'_{1,p}x'_p = b'_1, & L_1 \\ a'_{2,1}x_1 + a'_{2,2}x'_2 + \ldots + a'_{2,p}x_p = b'_2, & L_2 \\ \vdots & \\ a'_{n,1}x'_1 + a'_{n,2}x'_2 + \ldots + a'_{n,p}x'_p = b'_n, & L_n. \end{array}\right.$$

  La nouvelle ligne L_1 ainsi obtenue est appelée **pivot**.
  — utiliser la ligne pivot L_1 par des opérations élémentaires du type $L_i \leftarrow a'_{1,1}L_i - a'_{i,1}L_1$ pour annuler le coefficient devant l'inconnue x'_1 dans toutes les autres équations à partir de la deuxième équation (pour $i \in \{2, \ldots, n\}$). Le système (S) initial est alors équivalent à un nouveau système de la forme

$$(S'') \ : \ \left\{\begin{array}{rrl} a'_{1,1}x'_1 + & a'_{1,2}x'_2 + \ldots + a'_{1,p}x'_p = b'_1, & L_1 \\ & a''_{2,2}x'_2 + \ldots + a''_{2,p}x_p = b''_2, & L_2 \\ & \vdots & \\ & a''_{n,2}x'_2 + \ldots + a''_{n,p}x'_p = b''_n, & L_n. \end{array}\right.$$

- **étape 2 :** répéter l'étape 1 sur le sous-système

$$\left\{\begin{array}{l} a''_{2,2}x'_2 + \ldots + a''_{2,p}x_p = b''_2, \\ \vdots \\ a''_{n,2}x'_2 + \ldots + a''_{n,p}x'_p = b''_n, \end{array}\right.$$

  en laissant la ligne L_1 de (S'') inchangée.
- poursuivre cet algorithme jusqu'à voir apparaître une incompatibilité (dans le cas d'un système n'ayant pas de solution) ou jusqu'à obtenir un système échelonné.

Exemple 1.12. Mettons en oeuvre l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre le système suivant :

$$(S) \ : \ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 1. \end{array}\right.$$

On a :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & + & z & = & 2 & \\ & & 2y & - & z & = & 0 & \\ & & 3y & - & z & = & 3 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & + & z & = & 2 & \\ & & 6y & - & 3z & = & 0 & L_2 \leftarrow 3L_2 \\ & & 6y & - & 2z & = & 6 & L_3 \leftarrow 2L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & + & z & = & 2 & \\ & & 6y & - & 3z & = & 0 & \\ & & & & z & = & 6 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2. \end{array}\right.$$

Donc

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{r} x = 2 - 2y - z = -10 \\ y = 3z/6 = 3 \\ z = 6. \end{array} \right.$$

On en déduit que le système admet une unique solution qui est $(-10, 3, 6)$.

Attention. Lorsque l'on applique la méthode du pivot de Gauss, il est **impératif** d'écrire les équivalences entre les systèmes ainsi que les opérations effectuées sur les lignes d'une étape à l'autre comme dans l'exemple précédent.

1 Résoudre

$$\begin{cases} -2x + y + z + 7t = 1 \\ x + 3y + 3z + 7t = 10 \\ x + 2y + 2z + 4t = 7 \\ y + z + 3t = 3 \end{cases}$$

II Matrices rectangulaires

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 L'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1.13. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. Une **matrice** à n lignes et à p colonnes (appelée aussi matrice de taille $n \times p$) est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes et noté sous la forme :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ième colonne est noté $a_{i,j}$ et est appelé **terme général** de la matrice A. L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 1.14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 1.15. On appelle :

i) **matrice ligne** tout élément de $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$,

ii) **matrice colonne** tout élément de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

iii) **matrice nulle** de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice notée $0_{n,p}$ dont tous les éléments sont nuls.

II.2 Opérations sur les matrices

Définition 1.16. Soit $(A, B) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. On appelle **somme** de A et B la matrice C de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée $A + B$ et dont le terme général est donné par :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Remarque 1.17. Il s'agit en fait tout simplement de la somme coefficient par coefficient.

Exemple 1.18. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+2 & 0+1 \\ 0+1 & (-1)+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.19. Soit $(\lambda, A) \in \mathbb{K} \times \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **produit** de A par λ la matrice C de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée λA et dont le terme général est donné par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

Remarque 1.20. La matrice λA est obtenue en multipliant tous les coefficients de la matrice A par λ.

Exemple 1.21. On a :

$$3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 1 & 3\times 0 \\ 3\times 0 & 3\times(-1) \\ 3\times 2 & 3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Propriétés 1.22. Soient $(A,B,C) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

i) $A+B = B+A$

ii) $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$

iii) $(A+B)+C = A+(B+C)$

iv) $A+(-A) = (-A)+A = 0_{n,p}$

v) $1 \times A = A$

vi) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

vii) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

viii) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

Démonstration. Toutes ces propriétés découlent des propriétés usuelles de l'addition et de la multiplication sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\square$

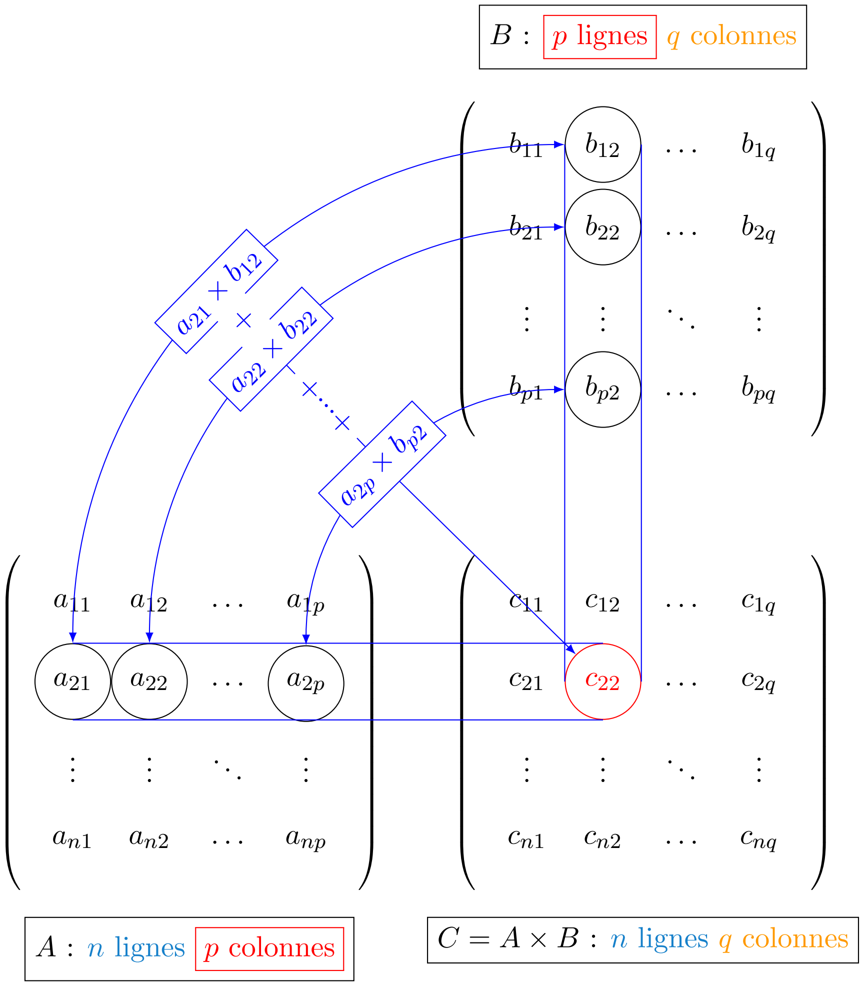
Définition 1.23. Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ une matrice de $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le **produit** de A par B, noté AB, est la matrice $(c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont le terme général est défini par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque 1.24. On ne peut pas en général multiplier deux matrices, il faut faire attention à leurs tailles respectives. De plus, il se peut que le produit AB ait un sens alors que BA n'en a pas. Pour se souvenir du cas où le produit de deux matrices est bien défini, on peut voir l'opération “produit” comme une application de l'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans l'ensemble $\mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ (les p “se simplifient”) :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \mapsto & AB. \end{array}$$

Illustration 1.25. Voici comment calculer le coefficient $c_{2,2}$ de la définition précédente.



Exemple 1.26. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 1 + 0 \times 2 & 1 \times 2 + 2 \times (-3) + 0 \times 2 \\ 0 \times 1 + (-1) \times 1 + 2 \times 2 & 0 \times 2 + (-1) \times (-3) + 2 \times 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2 Soient A, B et C les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AB et AC. Que remarque-t-on ?

3 On considère les matrices A et B ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AB et BA.

Remarque 1.27. Lorsque les produits AB et BA ont un sens, on a $AB \neq BA$ en général.

Le résultat ci-dessous présente les règles opératoires du produit matriciel, notamment les règles de distributivité du produit par rapport à l'addition des matrices.

Propriété 1.28. Soient A, B et C trois matrices. Lorsque les produits suivants ont un sens,

(i) $A(B+C) = AB + AC$,

(ii) $(A+B)C = AC + BC$,

(iii) $A0 = 0$,

(iv) $0A = 0$,

(v) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,

(vi) $A(BC) = (AB)C$,

où 0 désigne la matrice nulle de la dimension adéquate.

II.3 Transposée d'une matrice

Définition 1.29. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La **transposée** de A, notée ${}^tA$, est la matrice dont le terme général $(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est défini par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Remarque 1.30. Pour obtenir ${}^tA$, il suffit de transformer les lignes de A en des colonnes.

Exemple 1.31. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.32

Soient A et B deux matrices et $\lambda \in \mathbb{K}$. Lorsque les opérations ci-dessous ont un sens (i.e. quand les tailles des matrices sont compatibles avec les opérations), on a les égalités :

(i) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$,

(ii) ${}^t({}^tA) = A$,

(iii) ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$,

(iv) ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

II.4 Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 1.33. Considérons le système :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n. \end{cases}$$

La **matrice du système** est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.34. Reprenons les notations de la définition précédente et notons :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

Alors, le système (S) est équivalent à $AX = B$.

Exemple 1.35. La matrice du système :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ \quad x + y + z = 12 \end{cases}$$

est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

III Matrices carrées

III.1 Quelques matrices remarquables

Définition 1.36. Une **matrice carrée d'ordre** n est une matrice de $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Pour simplifier, on note $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices. On note aussi 0_n la matrice carrée nulle d'ordre n.

Exemple 1.37. Un exemple de matrice carrée d'ordre 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.38. La **matrice identité** de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice notée I_n ayant des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.39. Pour $n = 3$:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.40

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$AI_n = I_n A = A.$$

Démonstration. Exercice. □

4 Vérifier que la proposition précédente fonctionne avec une matrice 3×3 non triviale de votre choix.

Définition 1.41. Une matrice est dite **diagonale** si tous ses coefficients en-dehors de la diagonale sont nuls.

Exemple 1.42. La matrice identité est diagonale. Autre exemple de matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.43

Le produit de deux matrices diagonales de même dimension est une matrice diagonale.

Démonstration. Exercice. □

5 Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Que remarque-t-on ?

Définition 1.44. Une matrice A est dite **symétrique** si $A = {}^tA$.

Remarque 1.45. On reconnaît une matrice symétrique par le fait que ses coefficients sont symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple 1.46. La matrice ci-dessous est symétrique :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6 Démontrer que la somme de deux matrices symétriques de même dimension est une matrice symétrique.

Définitions 1.47. On dit qu'une matrice est **triangulaire supérieure** si tous ses coefficients en-dessous de la diagonale sont nuls. On définit de manière similaire une matrice **triangulaire inférieure**.

Exemple 1.48. La matrice ci-dessous est triangulaire supérieure :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7 Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Que remarque-t-on ?

III.2 Puissances d'une matrice

Définition 1.49. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On définit les **puissances** de A (par récurrence) de la façon suivante :

$$\begin{cases} A^0 = I_n, \\ A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p \text{ fois}} = A^{p-1} \times A. \end{cases}$$

Proposition 1.50

Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(i) $A^{p+q} = A^p A^q$;

(ii) $(A^p)^q = A^{pq}$;

(iii) $(\lambda A)^p = \lambda^p A^p$.

Attention. En général, $(AB)^p \neq A^p B^p$. De même, les identités remarquables ne sont plus valables. On doit écrire :

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

8 Soit A la matrice diagonale ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$.

Théorème 1.51 (Formule du binôme)

Soient $(A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $N \in \mathbb{N}$. Si $AB = BA$, alors :

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}.$$

Démonstration. C'est la même que celle de la formule du binôme pour deux réels ! □

III.3 Matrices inversibles

Définition 1.52. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** si :

$$\exists B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB = BA = I_n.$$

L'ensemble des matrices inversibles est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 1.53

Lorsqu'elle existe, la matrice B de la définition précédente est unique. On la note A^{-1} et on l'appelle matrice inverse de A.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 1.54. La matrice identité est inversible et $I_n^{-1} = I_n$. En effet :

$$I_n I_n = I_n I_n = I_n.$$

9 Soit A une matrice diagonale. À quelle condition suffisante A est-elle inversible ?

Théorème 1.55

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible ;

(ii) $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$, $AB = I_n$;

(iii) $\exists C \in M_n(\mathbb{K})$, $CA = I_n$.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, alors les matrices B et C des points (i) et (ii) sont égales à l'inverse de A : $B = A^{-1}$ et $C = A^{-1}$.

Proposition 1.56

Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

(i) Si A est inversible, alors A^{-1} l'est aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$;

(ii) Si A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 1.57

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si pour tout $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ l'équation

$$AX = X_0,$$

d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ admet une unique solution. Dans ce cas, cette unique solution est donnée par

$$X = A^{-1}X_0.$$

Cette proposition nous donne une première méthode d'étude de l'inversibilité d'une matrice et de calcul de son inverse le cas échéant.

Méthode (Calcul de l'inverse par résolution de système). Pour étudier si une matrice carrée A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

est inversible, on se donne une matrice colonne **quelconque** à n lignes $X_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ \vdots \\ x_{0,n} \end{pmatrix}$ et on résout l'équation matricielle $AX = X_0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (matrice colonne formée de n inconnues x_1, x_2, ..., x_n réelles ou complexes). Pour cela, on explicite le produit AX de sorte à réécrire l'équation $AX = X_0$ sous la forme d'un système de n équations à n inconnues :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = x_{0,1} \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = x_{0,2} \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = x_{0,n}. \end{array} \right.$$

Deux cas se présentent alors :

- soit il existe au moins une matrice colonne X_0 pour laquelle (S) n'admet pas de solution ou (S) admet une infinité de solutions $(x_1, x_2, \dots, x_n)$: dans ce cas la matrice A n'est pas inversible ;
- soit **pour toute** matrice colonne X_0, le système (S) admet une **unique** solution $(x_1, x_2, \dots, x_n)$: on exprime alors cette unique solution en fonction des paramètres $x_{0,1}$, $x_{0,2}$,...,$x_{0,n}$ sous la forme

$$(S') \quad \left\{ \begin{array}{c} x_1 = b_{1,1}x_{0,1} + b_{1,2}x_{0,2} + \dots + b_{1,n}x_{0,n} \\ x_2 = b_{2,1}x_{0,1} + b_{2,2}x_{0,2} + \dots + b_{2,n}x_{0,n} \\ \vdots \\ x_n = b_{n,1}x_{0,1} + b_{n,2}x_{0,2} + \dots + b_{n,n}x_{0,n}. \end{array} \right.$$

  On réécrit ensuite le système (S') sous forme matricielle $X = BX_0$ où

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

  La proposition précédente permet d'en conclure que A est inversible et que $A^{-1} = B$.

Exemple 1.58. Inversons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Résolvons l'équation $AX = X_0$.

$$AX = X_0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x+z \\ x+2y+2z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & x_0 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & y_0 \\ & & y & + & z & = & z_0. \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & y_0 \\ x & & & + & z & = & x_0 \\ & & y & + & z & = & z_0. \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \end{array}$$

D'où

$$AX = X_0 \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & y_0 \\ & - & 2y & - & z & = & x_0 \\ & & y & + & z & = & z_0. \end{array} \right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & y_0 \\ & - & 2y & - & z & = & x_0 \\ & & & & z & = & x_0 - y_0 + 2z_0 \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2.$$

En substituant l'expression de z dans L_1 et L_2, on obtient :

$$AX = X_0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y & = & -2x_0+3y_0-4z_0 \\ -2y & = & 2x_0-2y_0+2z_0 \\ z & = & x_0-y_0+2z_0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y_0-2z_0 \\ y & = & -x_0+y_0-z_0 \\ z & = & x_0-y_0+2z_0 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0-2z_0 \\ -x_0+y_0-z_0 \\ x_0-y_0+2z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$AX = X_0 \iff X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X_0.$$

D'après la proposition 1.57, on en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10 Déterminer si la matrice ci-dessous est inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 1.59

Considérons un système linéaire écrit sous forme matricielle :

$$AX = B,$$

où $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Ce système admet une unique solution ssi A est inversible. Si tel est le cas, alors la solution est donnée par :

$$X = A^{-1}B.$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 1.57. $\square$

Exemple 1.60. Résolvons :

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} x + z = 1, \\ x + 2y + 2z = 0, \\ y + z = 3. \end{cases}$$

La matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a vu plus haut qu'elle était inversible et que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, (S) admet une unique solution qui est donnée par :

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Voici une autre méthode de recherche de l'inversibilité d'une matrice et de détermination de son inverse le cas échéant. il s'agit simplement d'une réécriture sous forme matricielle et non sous forme de systèmes de la méthode précédente.

Méthode (Calcul de l'inverse par l'algortihme du pivot de Gauss ("méthode du miroir")). On effectue un algorithme du pivot de Gauss sur les lignes de la matrice A jusqu'à obtenir une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure). Deux cas se présentent :

- soit la matrice triangulaire obtenue comporte un ou plusieurs zéros sur sa diagonale, auquel cas la matrice A n'est pas inversible ;
- soit la matrice triangulaire obtenue ne comporte que des coefficients diagnonaux non nuls, auquel cas, on effectue de nouveau des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice, jusqu'à obtenir la matrice identité.

Toutes les opérations qui ont été faites sur les lignes de la matrice A doivent être faites **parallèlement** sur la matrice identité. La matrice obtenue à la fin du processus en partant de la matrice identité est alors A^{-1}.

Exemple 1.61. Reprenons la matrice A de l'exemple 1.58 en utilisant cette méthode.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftrightarrow L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow -L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

On retombe bien sur la même expression pour A^{-1} que celle obtenue par la première méthode.

Attention. Lorsqu'on pense avoir trouvé la matrice inverse A^{-1}, il peut être judicieux de vérifier rapidement par calcul que le produit AA^{-1} donne bien la matrice identité. Cela permet de déceler une éventuelle erreur de calcul dans la recherche de A^{-1}.

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- rappeler les primitives des fonctions usuelles,
- calculer une intégrale en reconnaissant une primitive simple,
- rappeler la formule d'intégration par parties,
- calculer une intégrale par intégration par parties,
- calculer une intégrale par un changement de variable donné,
- intégrer des inégalités,
- étudier une fonction définie par une intégrale,
- utiliser les sommes de Riemann pour calculer la limite de certaines suites.

I Sommes de Riemman

Sauf mention contraire, dans tout ce chapitre, a et b sont deux réels tels que $a < b$ et f désigne une fonction définie sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2.1.

- On appelle **subdivision** de $[a, b]$ la donnée d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et de $n+1$ points $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ tels que :

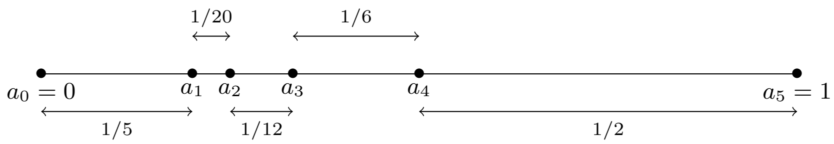
$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b.$$

- Soit h un réel strictement positif. La subdivision est dite **à pas constant** h si

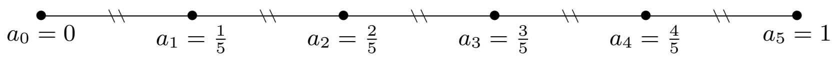
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad a_{k+1} - a_k = h.$$

Exemple 2.2. Deux exemples de subdivisions à 6 points du segment $[0, 1]$.

- Une subdivision à pas variable définie par $a_0 = 0$ et $a_k = \frac{1}{6-k}$, pour tout $k \in [\![1, 5]\!]$.

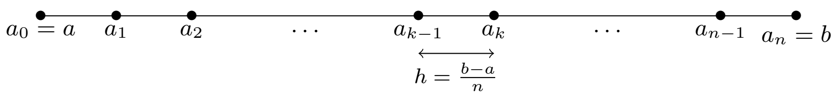


- Une subdivision à pas constant $h = \frac{1}{5}$:



Exemple 2.3 (Subdivision à pas constant d'un segment quelconque)**.** On construit une subdivision à pas constant du segment $[a, b]$ en posant :

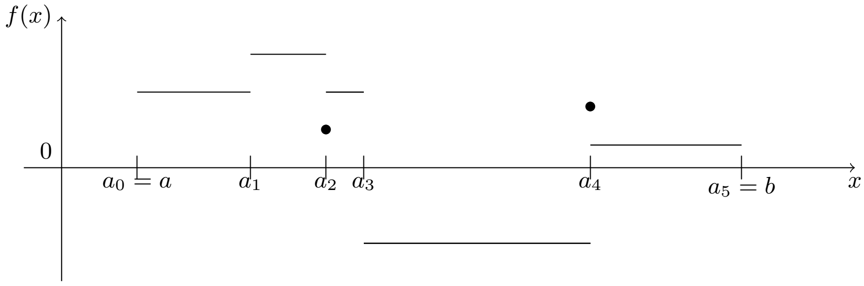
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}.$$



Définition 2.4. On dit que f est une **fonction en escalier** s'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ du segment $[a, b]$ pour laquelle f est constante sur chaque intervalle de la forme $]a_k, a_{k+1}[$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. On dit alors que la subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est **adaptée** à f.

Exemple 2.5. (i) Les fonctions constantes sont des fonctions en escalier.

(ii) L'allure générale d'une fonction en escalier est la suivante :



Remarque 2.6. Les valeurs que la fonction prend aux points a_k de la subdivision n'importent pas.

Proposition 2.7. Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et soit $\sigma = (a_0^\sigma, a_1^\sigma, \dots, a_n^\sigma)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note c_k^σ la valeur constante de f sur l'intervalle $]a_k^\sigma, a_{k+1}^\sigma[$. On pose

$$I^\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}^\sigma - a_k^\sigma) c_k^\sigma.$$

Avec ces notations, si $\widetilde{\sigma}$ est une autre subdivision adaptée à f, alors on a

$$I^\sigma(f) = I^{\widetilde{\sigma}}(f).$$

Définition 2.8. Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. On définit l'**intégrale** de f sur $[a,b]$ comme étant la quantité

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) c_k,$$

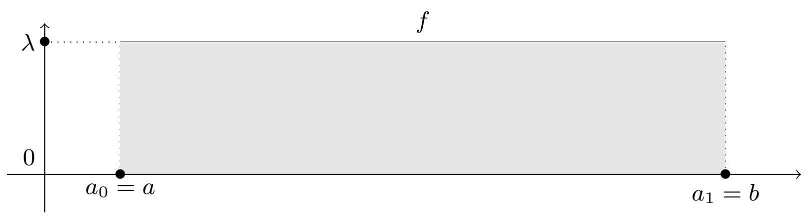
où $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est une subdivision quelconque adaptée à f et où c_k est la valeur constante de f sur $]a_k, a_{k+1}[$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Remarque 2.9. Dans l'expression $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, la variable x est dite **muette**. Elle peut être remplacée par n'importe quelle autre variable. En particulier, on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 2.10 (Intégrale d'une fonction constante). Si f est constante, égale au réel λ sur $[a,b]$, alors $a_0 = a$, $a_1 = b$ définit une subdivision à deux points adaptée à f et on a donc

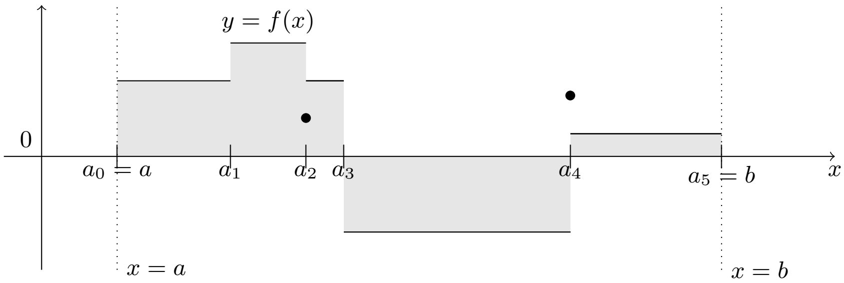
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\lambda.$$



L'intégrale d'une fonction constante $f(x) = \lambda$ sur un intervalle $[a,b]$ est donc exactement l'aire algébrique[1] du rectangle délimité par la droite horizontale d'équation $y = \lambda$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

1. l'aire est dite **algébrique** lorsqu'elle est comptée négativement en-dessous de l'axe des abscisses.

Remarque 2.11. Si f est en escalier sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est exactement l'aire algébrique de la surface délimitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. Pour la fonction en escalier de l'exemple 2.5 (ii), $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est exactement l'aire algébrique de la zone grisée ci-dessous.



I.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et note $(a_0, \cdots, a_n)$ la subdivision à pas constant déterminée par :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}.$$

Définition 2.12. Pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, soit ξ_k un réel quelconque dans l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$. On considère une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On appelle **somme de Riemann** de f associée à la famille de points $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_{n-1})$ la quantité

$$S_n^\xi(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k).$$

Théorème 2.13

Si f est continue sur $[a,b]$, alors pour toute famille de points $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_{n-1})$ telle que $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$:

(i) la suite des sommes de Riemann $\left(S_n^\xi(f)\right)_n$ converge ;

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^\xi(f)$ ne dépend pas de la suite de points $(\xi_0, \cdots, \xi_{n-1})$ choisie.

Définition 2.14. Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$, on appelle **intégrale** de f sur le segment $[a,b]$, et on note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, la limite de la suite formée par les sommes de Riemann de f, i.e.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k),$$

où $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque vérifiant $a_k \leqslant \xi_k \leqslant a_{k+1}$, avec $a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$.

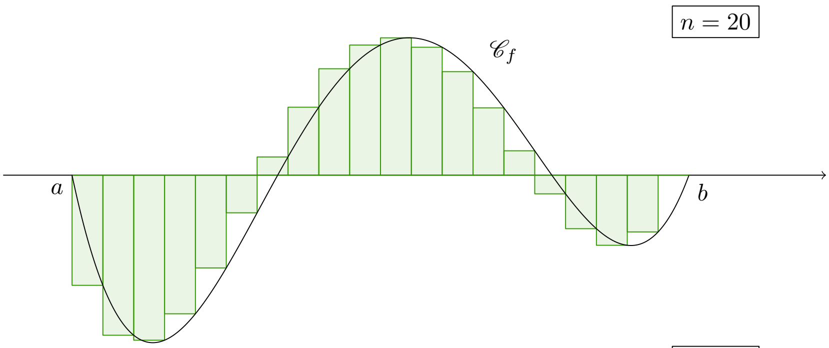
En général, on choisit les ξ_k comme étant l'une des deux bornes des intervalles $[a_k, a_{k+1}]$. Par exemple, en choisissant pour chaque ξ_k la borne supérieure de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ (i.e. $\xi_k = a_{k+1}$), on obtient le résultat suivant.

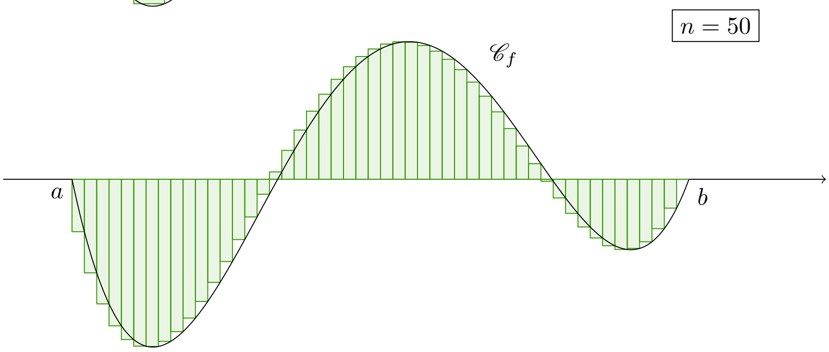
Corollaire 2.15

Si f est continue sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Illustration 2.16. La quantité $\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ correspond à l'aire en vert ci-dessous pour différentes valeurs de n. L'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ de la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ est la limite lorsque $n\to+\infty$ de la somme des aires des rectangles. On remarque alors que l'intégrale de f correspond à l'aire algébrique de la surface située entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

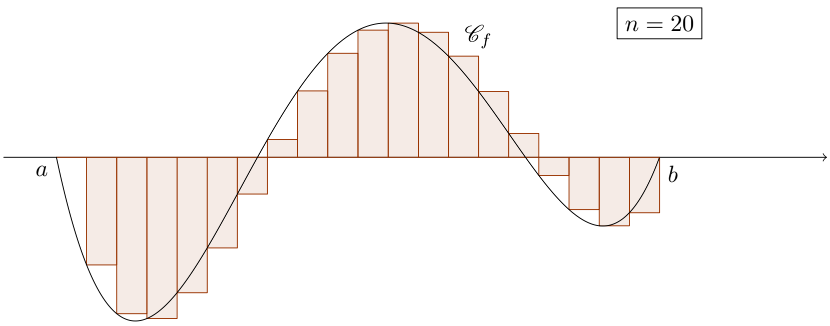




Remarque 2.17. De la même manière, en choisissant dans la définition 2.14 pour chaque ξ_k la borne inférieure de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ (i.e. $\xi_k = a_k$), on obtient le résultat suivant : si f est continue sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Cette fois, la quantité $\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ correspond à l'aire colorée ci-dessous :



11 On considère l'application :

$$f \ : \ [0,10] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x.$$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in [\![1,n]\!]$. On pose $a = 0$ et $b = 10$. Calculer :
$$f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$
2. Simplifier l'expression :
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$
3. En déduire $\displaystyle\int_0^{10} x \,\mathrm{d}x$.

I.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

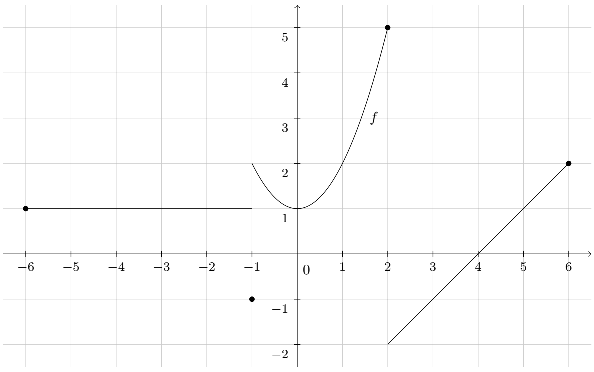
Définition 2.18. Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ du segment $[a,b]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f soit continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et telle que f admette en chacun des points $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de la subdivision une limite à droite et une limite à gauche.

Exemple 2.19. (i) Une fonction continue est continue par morceaux.

(ii) Les fonctions en escalier sont continues par morceaux.

(iii) Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-6,-1[, \\ -1, & \text{si } x = -1, \\ 1+x^2, & \text{si } x \in]-1,2], \\ x-4, & \text{si } x \in]2,6]. \end{cases}$$

Alors, f est continue par morceaux sur $[-6,6]$.



Définition 2.20. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. On désigne par $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ la subdivision formée par les points de discontinuité a_k de f. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $f_k = f_{|]a_k,a_{k+1}[}$ la restriction de f à l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ et on note $\widetilde{f_k}$ le prolongement par continuité de f_k au segment $[a_k, a_{k+1}]$. On définit l'**intégrale** de f sur le segment $[a,b]$ comme étant la quantité

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \widetilde{f_k}(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque 2.21. Pour calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on somme les intégrales de f sur chacun des intervalles où elle est continue.

12 Soit $f\colon [-1,11] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [-1,0[, \\ x & \text{si } x \in [0,10], \\ -1 & \text{si } x \in [10,11[, \\ 0 & \text{si } x = 11. \end{cases}$$

Déterminer $\displaystyle\int_{-1}^{11} f(x)\mathrm{d}x$ après avoir tracé le graphe de f.

Définition 2.22. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Par convention, on pose :

(i) $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$,

(ii) $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

II Propriétés de l'intégrale

Proposition 2.23 (Linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels dans I. On a :

(i) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Proposition 2.24 (Positivité de l'intégrale)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ avec $a \leqslant b$. On a :

$$\Big(\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant 0\Big) \implies \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0\right).$$

Corollaire 2.25 (Intégration d'une inégalité)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. On a :

$$\Big(\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant g(x)\Big) \implies \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right).$$

Démonstration. Exercice : appliquer la proposition 2.24 à la fonction positive $x \mapsto g(x) - f(x)$ et utiliser la linéarité de l'intégrale. □

Corollaire 2.26 (Inégalité triangulaire)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. On a :

$$\left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Proposition 2.27 (Relation de Chasles)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b et c dans I, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \mathrm{d}x.$$

Théorème 2.28 (Positivité stricte)

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur $[a, b]$ avec $a < b$. Si

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = 0,$$

alors

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) = 0.$$

Proposition 2.29 (Formule de la moyenne)

Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$. Alors il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = (b - a) f(c).$$

III Primitives

III.1 Ensemble des primitives d'une fonction

Définition 2.30. Soient I un **intervalle** non vide $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui est dérivable et qui vérifie

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

13 Déterminer deux primitives de la fonction $x \mapsto 3 + x - x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.31

Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet une primitive F, alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions $F_C : I \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in I, \quad F_C(x) = F(x) + C.$$

Remarque 2.32. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Pour trouver toutes les primitives d'une fonction, il suffit donc de n'en trouver qu'une seule.

14 Trouver toutes les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} - 2x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Corollaire 2.33

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive sur l'intervalle I. Soient $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors, il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(a) = b$.

Démonstration. Exercice. *Indication :* on pourra partir d'une primitive F de f et chercher la bonne constante à lui ajouter pour obtenir le résultat. □

III.2 Intégrale fonction de sa borne supérieure

III.2.1 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 2.34

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur un intervalle I et a un point de I. La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en $x = a$.

Exemple 2.35. La fonction

$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t \end{array}$$

est l'unique primitive sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en $x = 1$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. C'est la fonction **logarithme népérien**.

Corollaire 2.36 (Existence de primitives)

Toute fonction **continue** sur un intervalle y admet des primitives.

Démonstration. C'est une simple conséquence du théorème précédent. □

III.3 Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Intervalle	Primitives
$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$; $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n \leqslant -2$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert + c$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x + c$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi[$	$x \mapsto \tan x + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$x \mapsto \arcsin x + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan x + c$

15 Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur $]0, +\infty[$:

$$x \mapsto \sqrt{x}, \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

Rappel 2.37. Si $u : I \to J$ est une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J, et que f est une fonction dérivable sur J, alors la fonction composée $f \circ u$ est dérivable sur I, de dérivée

$$(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u).$$

Remarque 2.38. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ln \circ u$ est dérivable sur I, de dérivée $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Remarques
$u'f'(u)$	$f(u)$	On suppose que u est à valeurs dans un intervalle J sur lequel f est dérivable.
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	On suppose que u ne s'annule pas sur I.
$u'e^u$	e^u	
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	On suppose que $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ et que u ne s'annule pas sur I lorsque $n \leqslant -2$.
$u'u^\alpha$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$	On suppose que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que u est à valeurs dans $]0; +\infty[$.

16 Donner une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, de $u'u$ et de $u'\sin(u)$.

IV Méthodes pratiques

IV.1 Calcul d'intégrales

IV.1.1 Utilisation d'une primitive

Théorème 2.39 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Pour tous réels a et b dans I, on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Remarque 2.40. On note $\big[F\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

17 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

IV.1.2 Intégration par parties

Théorème 2.41

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tous réels a et b dans I, on a

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

18 En remarquant que :

$$\arctan(t) = \underbrace{1}_{u'(t)} \times \underbrace{\arctan(t)}_{v(t)},$$

calculer $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout réel x.

IV.1.3 Changement de variable

Théorème 2.42

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\alpha, \beta]$ (avec $\alpha < \beta$) à valeurs dans I. Alors, on a :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Méthode (Méthode de calcul d'intégrale par changement de variable). En pratique pour calculer une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ avec un changement de variable, on procède de la façon suivante :

1) on pose $x = \varphi(t)$ où $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$,
2) on calcule $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$,
3) on détermine les nouvelles bornes d'intégration α et β telles que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$,
4) on peut alors écrire

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 2.43. À l'aide du changement de variable $x = t^2$, calculons l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}\mathrm{d}x.$$

1) On pose pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi(t) = t^2$. On considère donc pour $t \geqslant 0$, le changement de variable $x = \varphi(t)$.
2) La fonction φ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, on calcule alors le nouveau $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t = 2t\mathrm{d}t.$$

3) Puisque $t \geqslant 0$, on a :
   - $x = 0 \implies \varphi(t) = 0 \implies t^2 = 0 \implies t = 0$,
   - $x = \frac{1}{4} \implies \varphi(t) = \frac{1}{4} \implies t^2 = \frac{1}{4} \implies t = \frac{1}{2}$.
4) Ainsi, l'intégrale peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\varphi(t) - \varphi(t)^2}}2t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{t^2 - t^4}}2t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\mathrm{d}t.$$

   On a donc :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin'(t)\mathrm{d}t = \Big[\arcsin(t)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin(0) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}.$$

Exemple 2.44. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x^2 - 1}$, déterminons :

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\mathrm{d}x.$$

1) On commence par remarquer que :

$$t = \sqrt{x^2 - 1} \implies t^2 = x^2 - 1 \implies x^2 = t^2 + 1 \implies x^2 = \pm\sqrt{t^2 + 1}.$$

   Or, $x \in [\sqrt{2}, 2]$. Ainsi, x est positif et on peut utiliser le changement de variable :

$$x = +\sqrt{t^2 + 1} = \varphi(t),$$

   où φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par composition.
2) D'après le point précédent, $\varphi(t) = \sqrt{t^2 + 1}$, donc :

$$\varphi'(t) = \frac{2t}{2\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

   On peut donc écrire :

$$\mathrm{d}x = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}\mathrm{d}t$$

3) Pour déterminer les nouvelles bornes d'intégration, on remarque que :

$$x = \sqrt{2} \implies t = \sqrt{\sqrt{2}^2 - 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad x = 2 \implies t = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}.$$

4) On peut alors écrire :

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}\, t} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \mathrm{d}t = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}t$$

On reconnaît la dérivée de la fonction arc tangente. L'intégrale est donc égale à :

$$\Big[\arctan(t)\Big]_{1}^{\sqrt{3}} = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

19 À l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

IV.2 Dérivée d'une fonction définie par une intégrale

Méthode (Dérivation d'une fonction définie par une intégrale). Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $[a,b]$. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour dériver la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

on procède en plusieurs étapes.

1. On justifie que f admet une primitive F sur $[a,b]$ car elle y est continue.
2. On réécrit la fonction φ à l'aide de F :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} F'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x)).$$

3. On en déduit la dérivabilité de φ et le calcul de φ' à l'aide des formules usuelles.

Remarque 2.45. Cette méthode permet dans certains cas de calculer la dérivée d'une fonction définie par une intégrale sans connaître explicitement une primitive de la fonction à intégrer.

Exemple 2.46. On considère la fonction ci-dessous dont on souhaite déterminer les variations :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{0}^{x^2} \exp\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

La fonction $t \mapsto \exp\left(\sqrt{t}\right)$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, elle y admet une primitive que l'on notera F par la suite. Cette primitive vérifie donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad F'(t) = \exp\left(\sqrt{t}\right).$$

On en déduit que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \varphi(x) = \int_0^{x^2} F'(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_0^{x^2} = F(x^2) - F(0).$$

Ainsi, φ est dérivable comme composée de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \varphi'(x) = 2xF'(x^2) - 0 = 2x\exp\left(\sqrt{x^2}\right) = 2x\exp(|x|).$$

Puisque la fonction exponentielle est positive, on en conclut que la fonction φ est décroissante sur $[-1,0]$ et croissante sur $[0,1]$.

20 Étudier le sens de variations de la fonction définie ci-dessous :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : &]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

V Calcul approché d'une intégrale

Proposition 2.47 (Méthode des rectangles à droite)**.** Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, alors la suite formée par les sommes de Riemann

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right),$$

converge vers $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, et l'erreur d'approximation vérifie

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n}\sup_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|.$$

Démonstration. On pose, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n(f) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}f(a_k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k}\left(f(x) - f(a_k)\right)\mathrm{d}x, \quad (2.1)$$

puisque $a_k - a_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. La fonction f étant $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, l'inégalité des accroissements finis appliquée sur chaque sous-intervalle $[a_{k-1},a_k]$ nous donne :

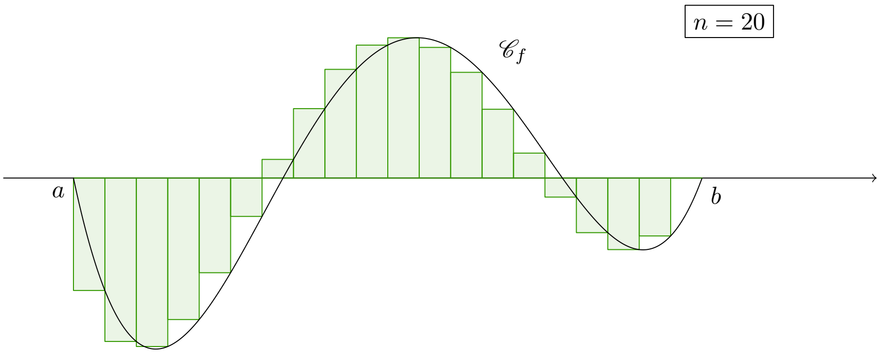
$$\forall x \in [a_{k-1},a_k], \quad |f(x) - f(a_k)| \leqslant M|x - a_k|,$$

où $M = \sup_{t\in[a_{k-1},a_k]}|f'(t)|$. On en déduit que

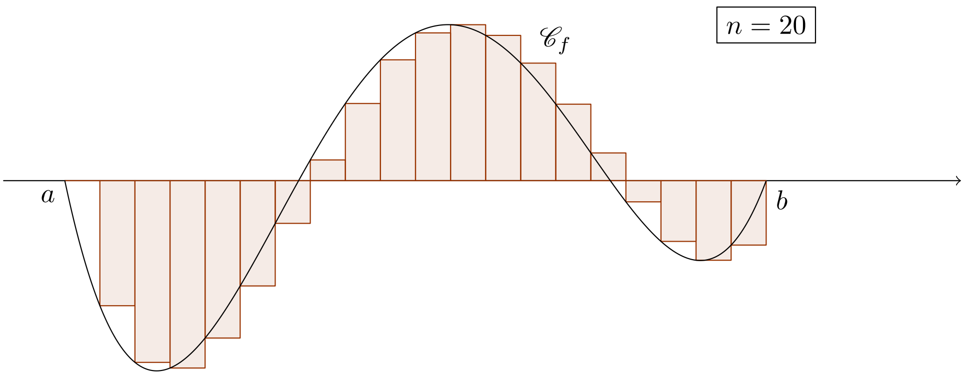
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n(f)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k}|f(x) - f(a_k)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} M\int_{a_{k-1}}^{a_k}|x - a_k|\,\mathrm{d}x.$$

Il suffit donc de calculer l'intégrale $\int_{a_{k-1}}^{a_k}|x - a_k|\,\mathrm{d}x$ pour obtenir une estimation de l'erreur d'approximation. □

Remarque 2.48. Le théorème 2.47 donne une majoration de l'erreur d'approximation de l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par les sommes de Riemann dans le cas de la **méthode des rectangles à droite**, c'est-à-dire lorsque, dans l'expression $S_n^\xi(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$ de la définition 2.12, on choisit comme valeur pour chaque point ξ_k l'extrémité droite $a_{k+1} = a + (k+1)\frac{b-a}{n}$ de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$. En fait, on approche la valeur de l'intégrale par la somme des aires des rectangles comme sur la figure ci-dessous.



Cette majoration de l'erreur est encore valable pour la **méthode des rectangles à gauche**, c'est-à-dire lorsqu'on choisit comme valeur pour ξ_k l'extrémité gauche $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$. Dans ce cas, on approche l'intégrale par la somme des aires des rectangles comme sur la figure qui suit.



VI Application au calcul de limites de certaines suites

Le corollaire 2.15 permet de calculer les limites de suites définies comme des sommes de Riemman de fonctions continues.

Exemple 2.49. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Alors, on peut écrire :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^2/n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad \text{où} \quad f \; : \; \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2}. \end{array}$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\arctan\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

21 Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{n}.$$

VII Formule de Taylor avec reste intégral

Remarque 2.50. D'après le théorème 2.39, si est f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ alors pour tout $x \in [a,b]$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

Le théorème ci-dessous est une généralisation de ce résultat.

Théorème 2.51

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle non vide et $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, alors, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. Ce théorème se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'étape d'initialisation (pour $n = 0$) est une simple conséquence du théorème 2.39 appliqué à la fonction f'. □

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capables de :

- démontrer qu'un sous-ensemble est/n'est pas un sous-espace vectoriel,
- démontrer qu'une famille de vecteurs donnée est libre/liée/génératrice/une base,
- déterminer une famille génératice d'un espace vectoriel,
- déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel,
- déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base,
- calculer le rang d'une famille de vecteurs,
- utiliser la formule de Grassmann pour calculer la dimension d'un espace-vectoriel,
- démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe/supplémentaires.

I Structure d'espace vectoriel

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

I.1 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Définition 3.1. On appelle **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$**-e.v** tout triplet $(E,+,.)$ où E est un ensemble non vide muni de deux opérations (encore appelées **lois**) :

- une **loi interne**, notée $+$ et appelée addition,

$$+ \ : \ \begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

  vérifiant les propriétés suivantes :

(A1) $\forall (u,v)\in E^2, \quad u+v=v+u,$ *commutativité de l'addition*

(A2) $\forall (u,v,w)\in E^3, \quad u+(v+w)=(u+v)+w,$ *associativité de l'addition*

(A3) $\exists e\in E,\ \forall u\in E, \quad e+u=u+e=u,$ *élément neutre pour l'addition*

(A4) $\forall u\in E,\ \exists v\in E, \quad u+v=v+u=e,$ *symétrique pour l'addition*

- une **loi externe**, notée . et appelée multiplication par les nombres (réels si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou complexes si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$),

$$\cdot \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,u) & \mapsto & \lambda\cdot u \end{array}$$

  vérifiant les propriétés suivantes :

(M1) $\forall (\lambda,\mu)\in \mathbb{K}^2,\ \forall u\in E, \quad (\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u,$ *distributivité de la multiplication sur l'addition des scalaires*

(M2) $\forall \lambda\in\mathbb{K},\ \forall (u,v)\in E^2, \quad \lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v,$ *distributivité de la multiplication sur l'addition des vecteurs*

(M3) $\forall (\lambda,\mu)\in \mathbb{K}^2,\ \forall u\in E, \quad (\lambda\mu)\cdot u=\lambda\cdot(\mu\cdot u),$ *associativité mixte*

(M4) $\forall u\in E, \quad 1\cdot u=u.$ *élément neutre pour la multiplication externe*

Les éléments de E sont alors appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ des **scalaires**.

Remarques 3.2.

- Souvent, on écrit la multiplication externe par les scalaires λu au lieu de $\lambda\cdot u$.
- Si $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., alors :
  — l'élément e de l'axiome (A3) est unique ; il est noté 0_E et est appelé **vecteur nul de** E,

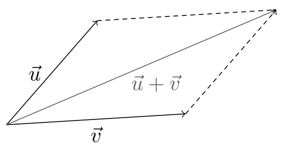
— pour tout $u \in E$, l'élément $v \in E$ de l'axiome (A4) est l'unique élément de E tel que $u + v = v + u = 0_E$; il est noté $-u$ et est appelé l'**opposé** de u.
— on note, pour tout $(u, v) \in E^2$, $u - v$ au lieu de $u + (-v)$.

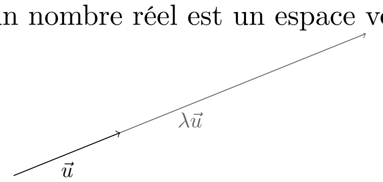
Exemples 3.3.

- L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de l'addition $+$ et de la multiplication $\times$ usuelles des nombres réels est un $\mathbb{R}$-e.v. : $(\mathbb{R}, +, \times)$. En revanche, les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}$ munis des mêmes opérations ne sont pas des $\mathbb{R}$-e.v. car ils ne sont pas stables pour la multiplication par les scalaires de $\mathbb{R}$: le nombre $u = 1$ vérifie bien $u \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, pourtant son produit $\pi \times u = \pi$ par le scalaire $\pi \in \mathbb{R}$ n'est pas un élément de $\mathbb{Q}$ (donc ni de $\mathbb{Z}$, ni de $\mathbb{N}$). On dit que ces ensembles ne sont pas **stables** par multiplication par un scalaire.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes muni de l'addition usuelle des complexes et de la multiplication externe par les nombres réels

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (\lambda, z) & \mapsto & \lambda z \end{array}$$

est un $\mathbb{R}$-e.v. : $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- L'ensemble des vecteurs du plan usuel muni de l'addition de deux vecteurs du plan et de la multiplication d'un vecteur du plan par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.





- L'ensemble des vecteurs de l'espace usuel définit également un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.4

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

(i) Pour tout $u \in E$, on a : $\quad 0 \cdot u = 0_E, \quad$ et $\quad (-1) \cdot u = -u.$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \; \forall u \in E, \quad \lambda \cdot u = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$.

(iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $(u, v) \in E^2$, on a :

$$(-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot (-u), \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v.$$

I.2 Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

I.2.1 L'espace $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On note $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dont les éléments sont des nombres de $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}^n = \Big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n), \; \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \; x_i \in \mathbb{K}\Big\}.$$

On le munit de la loi interne $+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ définie pour tout $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ par :

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

et de la loi externe $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ définie pour tout $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ par :

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

Alors, $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. Son vecteur nul est : $0_{\mathbb{K}^n} = \underbrace{(0, 0, \cdots, 0)}_{n \text{ termes}}$.

Notons que l'on peut identifier l'ensemble $\mathbb{K}^n$ à l'ensemble $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et 1 colonne (encore appelé l'ensemble des vecteurs colonnes à n composantes).

I.2.2 Les espaces de matrices $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

L'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition des matrices et de la multiplication externe d'une matrice par un scalaire est un $\mathbb{K}$-e.v. Le vecteur nul de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice nulle à n lignes et p colonnes.

I.2.3 L'espace des polynômes $\mathbb{K}[X]$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition usuelle des polynômes et de la multiplication externe d'un polynôme par un scalaire est un $\mathbb{K}$-e.v. Le vecteur nul de $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme nul.

I.2.4 Les espaces d'applications

- *Applications d'une variable.*
  Soient Ω un ensemble non vide et $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^\Omega$ l'ensemble des applications définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  On munit $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})$ des lois $+$ et $\cdot$ définies pour tout $(f, g) \in \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K}) \times \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ par :
  $$f + g : \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x), \end{array}$$
  et
  $$\lambda f : \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{array}$$
  Alors $(\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
  Le vecteur nul $0_{\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})}$ de $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})$ est l'application nulle :
  $$\begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & 0. \end{array}$$

- *Applications entre espaces vectoriels.*
  Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $\mathscr{F}(E, F)$ l'ensemble des applications définies sur E et à valeurs dans F.
  On définit sur $\mathscr{F}(E, F)$ les lois $+$ et $\cdot$ par, pour tout $(f, g) \in \mathscr{F}(E, F) \times \mathscr{F}(E, F)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:
  $$f + g : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x), \end{array}$$
  et
  $$\lambda f : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{array}$$
  Alors $(\mathscr{F}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
  Le vecteur nul de $\mathscr{F}(E, F)$ est l'application :
  $$\begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F. \end{array}$$

Exemples 3.5.

- Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{F}(I,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^I$ des fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs réelles, muni de l'addition usuelle des fonctions et du produit d'une fonction par un nombre réel, est un $\mathbb{R}$-e.v.
- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles muni de l'addition usuelle des suites et du produit d'une suite par un nombre réel est un $\mathbb{R}$-e.v.

I.3 Sous-espaces vectoriels

Dans tout ce paragraphe, $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 3.6. Soit F une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $0_E \in F$,

(ii) $\forall (u,v) \in F^2, \quad u+v \in F$,

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in F, \quad \lambda \cdot u \in F$.

Proposition 3.7

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\begin{cases} F \neq \varnothing \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u,v) \in F^2, \quad \lambda \cdot u + v \in F. \end{cases}$$

Exemple 3.8. Les ensembles $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E. On les appelle les sous-espaces vectoriels triviaux de E.

Exemple 3.9. Démontrons que l'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-2y+z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(i) Il est clair que F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est non vide puisqu'il contient le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^3}$ de $\mathbb{R}^3$. En effet un vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ appartient à F si et seulement si ses composantes x et y et z vérifient la relation $x - 2y + z = 0$.

(ii) Il reste à démontrer que F est stable par combinaison linéaire : considérons deux éléments (x,y,z) et (x',y',z') de F et un nombre réel λ et démontrons que le vecteur $\lambda \cdot (x,y,z) + (x',y',z')$ est encore un élément de F. Remarquons que

$$\lambda \cdot (x,y,z) + (x',y',z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z').$$

D'après la définition de F, le vecteur $(\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z')$ appartient à F si et seulement si :

$$(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z') = 0.$$

Or :

$$(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda(x - 2y + z) + (x' - 2y' + z').$$

Puisque (x,y,z) et (x',y',z') appartiennent à F,

$$\{x - 2y + z = 0, x' - 2y' + z' = 0.$$

On en déduit donc que $(\lambda x+x')-2(\lambda y+y')+(\lambda z+z') = 0$; ce qui signifie que $\lambda \cdot (x,y,z) + (x',y',z')$ appartient à F.

22 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et soit $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Démontrer que l'ensemble

$$\Big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\Big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 3.10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X] = \big\{P \in \mathbb{K}[X],\ \deg P \leqslant n\big\}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, avec la convention $\deg 0 = -\infty$: exercice.

Exemple 3.11. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$: exercice.
- De même $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I) et $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I) sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathscr{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exemple 3.12 (Contre-exemple). L'ensemble $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 2\big\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, il ne contient pas le vecteur nul $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ puisque $0 - 2 \times 0 + 0 \neq 2$.

Proposition 3.13

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors l'ensemble F muni des deux lois $+$ et $\cdot$ induites par E est un $\mathbb{K}$-e.v.

Méthode (Méthode pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel). En général, pour démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,

1) on cherche un $\mathbb{K}$-e.v. $(E, +, \cdot)$ qui contient l'ensemble F,

2) on démontre que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 3.14. Démontrons que l'ensemble F des fonctions dérivables sur $[0, 1]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour cela, démontrons que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{F}([0, 1], \mathbb{R})$:

(i) Le vecteur nul de $\mathscr{F}([0, 1], \mathbb{R})$ est la fonction nulle $0_{\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$. La fonction nulle est dérivable sur $[0, 1]$ donc $0_{\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})} \in F$.

(ii) Soient $f \in F$ et $g \in F$. Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0, 1]$, donc $f + g$ est déérivable sur $[0, 1]$ (de dérivée $(f + g)' = f'g + fg'$). Ainsi, $f + g \in F$.

(iii) Soit de plus $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque f est dérivable sur $[0, 1]$, la fonction λf est dérivable sur $[0, 1]$ (de dérivée $(\lambda f)' = \lambda f'$). On a donc $\lambda f \in F$.

On en déduit donc que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([0, 1), \mathbb{R})$. Ainsi, F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

23 Démontrer que l'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-e.v.
Indication : on remarquera d'abord que cet ensemble est le sous-ensemble de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formé par les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.15

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Exercice. □

II Familles libres, familles génératrices

Dans toute cette partie, on considère un $\mathbb{K}$-e.v. $(E, +, \cdot)$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 Combinaisons linéaires

Définition 3.16. Soient $u_1, u_2, \cdots, u_p$ des vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$ tout vecteur u de E de la forme

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ sont des scalaires quelconques de $\mathbb{K}$ qui sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 3.17. Considérons les fonctions f, g et h de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définies par :

$$f(x) = \cos(2x), \quad g(x) = \cos^2 x, \quad h(x) = 1.$$

La fonction f est combinaison linéaire des fonctions g et h : $f = 2g - h$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, i.e. $f(x) = 2g(x) - h(x)$.

Exemple 3.18. Démontrons que le polynôme $P(X) = 1 - X$ est combinaison linéaire des polynômes $Q(X) = X + 3$ et $R(X) = X + 1$, c'est-à-dire qu'il existe deux scalaires α et β tels que $P(X) = \alpha Q(X) + \beta R(X)$:

$$\begin{aligned} P(X) = \alpha Q(X) + \beta R(X) &\iff 1 - X = \alpha(X+3) + \beta(X+1) \\ &\iff 1 - X = (\alpha+\beta)X + (3\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Cela revient donc à résoudre le système ci-dessous d'inconnue (α, β) :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 3\alpha + \beta = 1. \end{cases}$$

Or :

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} \alpha+\beta &=& -1 & L_1 \\ 3\alpha+\beta &=& 1 & L_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrl} \alpha+\beta &=& -1 & \\ -2\beta &=& 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrl} \alpha+\beta &=& -1 & \\ \beta &=& -2 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha &=& 1 \\ \beta &=& -2. \end{array} \right.$$

Ce système admet une unique solution $(\alpha, \beta) = (1, -2)$, donc P est bien combinaison linéaire de Q et R :

$$P(X) = 1 \cdot Q(X) + (-2) \cdot R(X).$$

Exemple 3.19. Toute matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ s'écrit comme combinaison linéaire des quatre matrices

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$A = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22}.$$

24 On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$u = (1, -1), \quad v = (3, 4), \quad \text{et} \quad w = (1, 0).$$

Démontrer que w est combinaison linéaire des vecteurs u et v.

Proposition 3.20 (Définition d'un sous-espace vectoriel engendré)

Soient $u_1, u_2, \cdots, u_p$ des vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré** par les vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$ et on le note

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p).$$

Remarque 3.21. En fait,

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \Big\{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p, \; (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\Big\}.$$

Exemple 3.22. Considérons le vecteur $\vec{u} = (1, -2)$ du plan $\mathbb{R}^2$. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par $\vec{u}$ est l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(\vec{u}) &= \Big\{\lambda \vec{u}, \; \lambda \in \mathbb{R}\Big\} \\ &= \Big\{(\lambda, -2\lambda), \; \lambda \in \mathbb{R}\Big\} \\ &= \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \; y = -2x\Big\}, \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que la droite du plan d'équation $y = -2x$.

Exemple 3.23. Démontrons que l'ensemble $\big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \; x = 2y\big\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les trois vecteurs $(2, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$.

Posons $F = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \; x = 2y\big\}$. Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

$$\begin{aligned} \vec{u} \in F &\Longleftrightarrow x = 2y \\ &\Longleftrightarrow \vec{u} = (2y, y, z, t) \\ &\Longleftrightarrow \vec{u} = (2y, y, 0, 0) + (0, 0, z, 0) + (0, 0, 0, t) \\ &\Longleftrightarrow \vec{u} = y(2, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F &= \Big\{y(2, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1), \; (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\Big\} \\ &= \mathrm{Vect}\Big((2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\Big). \end{aligned}$$

25 Démontrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - 2y + z = 0\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par deux vecteurs que l'on précisera.
Indication : on s'inspirera de l'exemple précédent en commençant par exprimer une des 3 composantes d'un vecteur (x, y, z) de F en fonction des 2 autres.

Proposition 3.24

Soient $u_1, u_2, \cdots, u_p$ des vecteurs de E. L'ensemble $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$.

Remarque 3.25. Autrement dit, si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$ alors $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p) \subset F$.

Exemple 3.26. Cette proposition permet, par exemple, de démontrer l'inclusion suivante entre sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{Vect}\big((1,0), (0,1)\big) \subset \mathrm{Vect}\big((2,1), (1,2)\big).$$

En effet, il est facile de vérifier que :

$$(1,0) = \frac{2}{3}(2,1) - \frac{1}{3}(1,2), \quad (0,1) = -\frac{1}{3}(2,1) + \frac{2}{3}(1,2);$$

ce qui implique que les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ appartiennent tous deux au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,((2,1),(1,2))$ engendré par les vecteurs $(2,1)$ et $(1,2)$. D'où le résultat d'après la remarque précédente.

II.2 Familles génératrices

Définition 3.27. Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une famille finie de p vecteurs de E. On dit que $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est une famille **génératrice** de E si $E = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$.

Proposition 3.28

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est une famille génératrice de E.

(ii) Tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$.

Exemple 3.29. D'après l'exemple 3.19, la famille des matrices $(M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22})$ définies par

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est une famille génératrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

26 Démontrer que la famille $(1, i)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-e.v. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

27 Démontrer que les vecteurs $\vec{u} = (1,1)$ et $\vec{v} = (3,2)$ de $\mathbb{R}^2$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3.30

Toute famille qui contient une famille génératrice de E est encore une famille génératrice de E.

II.3 Famille libre

Définition 3.31. Soient $u_1, u_2, \cdots, u_p$ des vecteurs de E. On dit que la famille de vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est **libre** (ou encore que les vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$ sont **linéairement indépendants**) si :

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \Big(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0\Big).$$

Définition 3.32. Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite **liée**.

Proposition 3.33

Une famille $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ de vecteurs de E est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.

Exemples 3.34.
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan usuel. La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- La famille $(1, i)$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-e.v. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, mais c'est une famille liée dans le $\mathbb{C}$-e.v. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Exemple 3.35. Démontrons que les fonctions $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x,$$

forment une famille libre du $\mathbb{R}$-e.v. $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel quel $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, où $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ représente le vecteur nul de $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$, c'est-à-dire la fonction nulle. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0,$$

ce qui s'écrit encore,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0.$$

Cette dernière égalité étant vérifiée pour tout réel x, elle l'est en particulier pour :
- $x = 0$, ce qui donne $\lambda_1 \cos(0) + \lambda_2 \sin(0) = 0$, i.e. $\lambda_1 = 0$,
- $x = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $\lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, i.e. $\lambda_2 = 0$.

Ainsi, on a $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$; ce qui signifie que la famille (f_1, f_2) est libre.

28 La famille $(1, 1 + X^2, X^2)$ est-elle libre dans $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$?

Proposition 3.36

Toute sous-famille d'une famille libre est une famille libre.

II.4 Bases d'un espace vectoriel

Définition 3.37. On appelle **base** de $(E,+,\cdot)$ toute famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice.

Exemple 3.38. La famille $(1,i)$ est une base du $\mathbb{R}$-e.v. $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

Exemple 3.39. Les quatre matrices

$$M_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ M_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ M_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\ \text{ et }\ M_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

forment une base du $\mathbb{K}$-e.v. $(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}),+,\cdot)$. Nous avons déjà vu que la famille $(M_{11},M_{12},M_{21},M_{22})$ est génératrice. Il reste à démontrer qu'elle est libre : soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{K}^4$ tel que

$$\lambda_1M_{11}+\lambda_2M_{12}+\lambda_3M_{21}+\lambda_4M_{22}=0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}.$$

Puisque

$$\begin{aligned}\lambda_1M_{11}+\lambda_2M_{12}+\lambda_3M_{21}+\lambda_4M_{22}&=\lambda_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\lambda_2\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\\lambda_3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&\lambda_4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\\lambda_3&\lambda_4\end{pmatrix},\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\\lambda_3&\lambda_4\end{pmatrix}=0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$ et $\lambda_4=0$. Ainsi, la famille $(M_{11},M_{12},M_{21},M_{22})$ est libre.

Exemple 3.40. La famille $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ définie par

$$\begin{aligned}&e_1=(1,0,0,\cdots,0)\\&e_2=(0,1,0,\cdots,0)\\&\vdots\\&e_i=(0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\\text{rang i}}}{1},0,\cdots,0)\\&\vdots\\&e_n=(0,\cdots,0,1)\end{aligned}$$

est une base de $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ appelée **base canonique** de $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$.

$\boxed{29}$ Démontrer que la famille $\left(1,X,X^2,\cdots,X^n\right)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}_n[X],+,\cdot)$. On l'appelle la **base canonique** de $(\mathbb{K}_n[X],+,\cdot)$.

Proposition 3.41 (Coordonnées d'un vecteur dans une base finie)

Soit $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(ii) Tout vecteur u de E s'écrit de manière **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$:

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p,$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.

(iii) L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \end{array}$$

est bijective.

Définition 3.42. Soient $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une base de E et u un vecteur de E. Les p scalaires uniques λ_1, λ_2, ..., λ_p pour lesquels u s'écrit :

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p,$$

sont appelés les **coordonnées** du vecteur u dans la base $\mathscr{B}$. On note $u_{\mathscr{B}}$ le vecteur colonne formé par les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathscr{B}$:

$$u_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

30 Donner les coordonnées du vecteur $P = 1+3X-2X^3$ dans la base canonique de $(\mathbb{K}_3[X], +, \cdot)$, à savoir $(1, X, X^2, X^3)$.

III Somme de deux sous-espaces vectoriels

III.1 Sous-espace vectoriel engendré par la réunion de deux sous-espaces vectoriels

Définition 3.43. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme de F et G** le sous-ensemble de E noté $F + G$ défini par

$$F + G = \{u_F + u_G,\ (u_F, u_G) \in F \times G\}.$$

Proposition 3.44

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors :

(i) $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) $F+G$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $F \cup G$.

Exemple 3.45. Si $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ et que $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \cdots, v_q)$, alors

$$F + G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p, v_1, v_2, \cdots, v_q).$$

III.2 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 3.46. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F+G$ est **directe** lorsque

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

On note alors $F \oplus G$ au lieu de $F+G$.

Remarque 3.47. Notons que $F \cap G$ étant un sous-espace vectoriel de E, on a toujours $0_E \in F \cap G$, et donc $\{0_E\} \subset F \cap G$. Pour démontrer que F et G sont en somme directe, il suffit donc seulement de démontrer l'inclusion $F \cap G \subset \{O_E\}$, ce qui revient à démontrer que le seul vecteur appartenant à l'intersection $F \cap G$ est le vecteur nul.

Exemple 3.48. Montrons que les sous-espaces vectoriels H et D de $\mathbb{R}^n$ définis par

$$H = \Big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\Big\}, \quad D = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,1,1,\cdots,1)}_{n}\big)$$

sont en somme directe.

Soit $x \in H \cap D$. Il s'agit de démontrer que $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Puisque $x \in H$, on peut écrire x sous la forme :

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0. \tag{3.1}$$

D'autre part, $x \in D$, donc il existe un scalaire $d \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x = d(1,1,1,\cdots,1) = (d,d,d,\cdots,d). \tag{3.2}$$

En identifiant ces deux écritures de x, on obtient :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad x_i = d,$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} d = nd.$$

D'après (3.1), on en déduit que $nd = 0$, et donc que $d = 0$. En remplaçant dans (3.2), on en conclut que

$$x = (0,0,0,\cdots,0) = 0_{\mathbb{R}^n};$$

ce qui signifie (d'après la remarque 3.47) que $H \cap D = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, c'est-à-dire que H et D sont en somme directe.

31 Démontrer que les deux sous-espaces vectoriels F et G ci-dessous de $\mathbb{R}^2$ sont en somme directe :

$$F = \mathrm{Vect}\big((1,0)\big), \quad G = \mathrm{Vect}\big((0,1)\big).$$

Proposition 3.49

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $F + G = F \oplus G$.

(ii) Tout élément u de $F + G$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.

III.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 3.50. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **supplémentaires** dans E si

$$E = F \oplus G.$$

Corollaire 3.51

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $E = F \oplus G$.

(ii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

(iii) $\forall u \in E,\ \exists!(u_F, u_G) \in F \times G, \quad u = u_F + u_G$.

Démonstration. C'est une simple conséquence de la proposition 3.49. □

Remarque 3.52. Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemple 3.53. Montrons que les sous-espaces vectoriels H et D de l'exemple 3.48 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Utilisons, par exemple, la caractérisation (iii) du corollaire 3.51. Pour cela, on procède en général par analyse/synthèse. Soit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. Montrons qu'il existe un unique couple de vecteurs $(x_H, x_D) \in H \times D$ tel que $x = x_H + x_D$.

- Analyse : supposons qu'un tel couple (x_H, x_D) existe. Montrons alors qu'il est nécessairement unique.

  Notons $x_H = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$ avec $\sum_{i=1}^{n} h_i = 0$ et $x_D = d(1, 1, 1, \cdots, 1) = (d, d, d, \cdots, d)$. Le vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ s'écrit alors :

  $$x = x_H + x_D = (h_1, h_2, \cdots, h_n) + (d, d, \cdots, d) = (h_1 + d, h_2 + d, \cdots, h_n + d).$$

  On en déduit donc que :

  $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = h_i + d. \tag{3.3}$$

  D'où :

  $$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (h_i + d) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right) + nd = 0 + nd = nd;$$

ce qui donne

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Le vecteur x_D est donc entièrement déterminé à partir des composantes du vecteur x :

$$x_D = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot (1, 1, 1, \cdots, 1).$$

En remplaçant dans (3.3), on en déduit les composantes du vecteur x_H :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad h_i = x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Le vecteur x_H est donc déterminé de manière unique en fonction des composantes du vecteur x. On a donc démontré, sous réserve d'existence, l'unicité du couple $(x_H, x_D) \in H \times D$ tel que $x = x_H + x_D$.

- Synthèse : démontrons maintenant l'existence d'un tel couple (x_H, x_D). Posons

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \text{et} \quad x_H = d(1, 1, 1, \cdots, 1).$$

Par construction, il est clair que $x_D \in D$. Posons alors $x_H = x - x_D$. On a donc :

$$x_H = (x_1, x_2, \cdots, x_n) - (d, d, \cdots, d) = (x_1 - d, x_2 - d, \cdots, x_n - d),$$

avec

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - d) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - nd = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0.$$

Ainsi, $x_H \in H$. Et par définition de x_H, il est évident que $x = x_H + x_D$. On a donc construit un couple $(x_H, x_D) \in H \times D$ pour lequel $x = x_H + x_D$.

On a donc démontré, par analyse/synthèse, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \exists!(x_H, x_D) \in H \times D, \quad x = x_H + x_D;$$

ce qui signifie que

$$\mathbb{R}^n = H \oplus D.$$

32 Démontrer que les sous-espaces vectoriels F et G de l'exercice 31 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

IV Espaces vectoriels de dimension finie

IV.1 Existence de bases

Définition 3.54. Un espace vectoriel E est dit **de dimension finie** s'il admet au moins une famille génératrice finie.

Exemple 3.55. L'espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est de dimension finie puisque la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice finie.

Théorème 3.56 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Corollaire 3.57. Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ admet au moins une base.

IV.2 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 3.58

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $n \in \mathbb{N}^*$. Si E admet une base formée de n vecteurs, alors toute base de E est formée d'exactement n vecteurs.

Définition 3.59. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. On appelle **dimension** de E le nombre de vecteurs constituant une base de E. On note cette quantité $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Remarque 3.60. Par convention, on pose $\dim_{\mathbb{K}}(\{0_E\}) = 0$. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur l'ensemble $\mathbb{K}$ des scalaires, on note $\dim(E)$ au lieu de $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Exemples 3.61.
- $\mathbb{R}^n$ est de dimension n sur $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{C}^n$ est de dimension n sur $\mathbb{C}$,
- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$,
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, et plus généralement, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$,
- Si $u \neq 0_E$, alors $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Vect}(u)) = 1$.

IV.3 Caractérisation des bases

Proposition 3.62 (Cardinal d'une famille libre/génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n avec $n \geqslant 1$.

(i) Toute famille libre de E est composée d'au plus n vecteurs.

(ii) Toute famille génératrice de E est composée d'au moins n vecteurs.

Théorème 3.63 (Caractérisation des bases avec la dimension)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n avec $n \geqslant 1$. Soit $\mathscr{B}$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(ii) $\mathscr{B}$ est une famille libre de n vecteurs de E.

(iii) $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de n vecteurs de E.

Méthode (pour démontrer qu'une famille de vecteurs est une base). Soit E un espace vectoriel de dimension n avec $n \geqslant 1$. Pour démontrer qu'une famille $\mathscr{B} = (u_1, \cdots, u_p)$ de p vecteurs de E est une base de E, il suffit de démontrer que :

1) $p = n$

et

2) $\mathscr{B}$ est libre (**ou** $\mathscr{B}$ est génératrice).

33 Démontrer que la famille $\big((1,2),(3,4)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

IV.4 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème 3.64

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors :

(i) F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$,

(ii) si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

34 Soient $P(X) = X - 1$ et $Q(X) = X + 1$.

1) Démontrer que $\mathrm{Vect}\big(P, Q\big)$ est de dimension 2.

2) En déduire que $\mathrm{Vect}\big(P, Q\big) = \mathbb{R}_1[X]$.

Définitions 3.65. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

- Si $\dim(F) = 1$, alors on dit que F est une **droite vectorielle** de E.
- Si $\dim(F) = 2$, alors on dit que F est un **plan vectoriel**.
- Si $\dim(F) = \dim(E) - 1$, alors on dit que F est un **hyperplan** de E.

Proposition 3.66 (Existence de s-e.v. supplémentaires en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :

(i) F admet au moins un supplémentaire G dans E (i.e. il existe au moins un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$),

(ii) dans ce cas, $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Théorème 3.67 (Formule de Grassmann)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$\dim\left(F + G\right) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

35 Considérons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\Big\}, \quad G = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = z\Big\}.$$

1) Déterminer une base et la dimension de F.
2) Déterminer une base et la dimension de G.
3) Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.
4) Déduire des questions précédentes la dimension de $F + G$.

Corollaire 3.68. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$,

(ii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ **et** $E = F + G$,

(iii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ **et** $F \cap G = \{0_E\}$.

36 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E. Soit $a \in E \setminus H$.
1) Rappeler la dimension de H.
2) Démontrer que $\dim(\mathrm{Vect}(a)) = 1$. (*Indication : on démontrera pour cela que $a \neq 0_E$.*)
3) Démontrer que $H \cap \mathrm{Vect}(a) = \{0_E\}$.
4) Déduire des questions précédentes que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

IV.5 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 3.69. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle **rang** d'une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs de E l'entier

$$\mathrm{rang}(\mathscr{F}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})).$$

Autrement dit,

$$\mathrm{rang}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p)).$$

Exemple 3.70. Soient u_1 et u_2 deux vecteurs d'un espace vectoriel E.

$$\mathrm{rang}(u_1, u_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_1 = u_2 = 0, \\ 1 & \text{si } u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont colinéaires}, \\ 2 & \text{si la famille } (u_1, u_2) \text{ est libre.} \end{cases}$$

Proposition 3.71

$\mathrm{rang}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = p \iff (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est libre.

Théorème 3.72

Le sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est inchangé si on effectue les opérations élémentaires suivantes sur cette famille vecteurs :

(i) retrait du vecteur nul s'il est présent,

(ii) permutation de deux vecteurs u_i et u_j ($u_i \leftrightarrow u_j$),

(iii) multiplication d'un vecteur u_i par un scalaire non nul a ($u_i \leftarrow a u_i$),

(iv) addition à un vecteur u_i d'un multiple $a u_j$ d'un autre vecteur u_j ($u_i \leftarrow u_i + a u_j$).

Méthode (pour calculer le rang d'une famille de vecteurs). Ainsi, pour calculer le rang d'une famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ de E, on procède comme suit :

1) On considère la matrice A dont les colonnes représentent les coordonnées des vecteurs u_1, u_2, $\cdots$ et u_p dans une base $\mathscr{B}$ de E.
2) On effectue une méthode du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice A.
3) À la fin du processus, les colonnes non nulles de la matrice échelonnée obtenue sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs d'une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Le rang de la famille $\mathscr{F}$ est alors le nombre de colonnes non nulles de cette matrice échelonnée.

Exemple 3.73. Considérons les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, 1, 1)$, $w = (0, 1, 2)$ et $x = (1, 0, 3)$. Déterminons le rang de la famille (u, v, w, x).
Notons A la matrice dont les colonnes représentent les coordonnées des vecteurs u, v, w et x dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On échelonne les colonnes de la matrice A :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - \frac{1}{3}C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + \frac{2}{3}C_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad C_4 \leftarrow C_4 - 2C_3.$$

La matrice obtenue étant échelonnée, les vecteurs $(1, 2, 3)$, $(0, 3, 4)$ et $(0, 0, \frac{2}{3})$ forment une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u, v, w, x)$. Ainsi, $\mathrm{rang}(u, v, w, x) = 3$.

37 Déterminer le rang des deux familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

1) (u, v) où $u = (1, 2, -1, 1)$ et $v = (2, 3, 0, -1)$.
2) (u, v, w) où $u = (-2, 1, 1, 1)$, $v = (0, 3, 1, -1)$ et $w = (-6, 9, 5, 1)$.

Indication : pour le point 1) on se reportera à l'exemple 3.70.