Table des matières

I Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle

Définition 1.1 (Intégrale généralisée). On appelle *intégrale généralisée* ou *intégrale impropre* une intégrale du type

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

lorsqu'on intègre jusqu'à une borne infinie ou lorsqu'on intègre jusqu'à une borne en laquelle la fonction n'admet pas de limite finie.

Lorsque f est continue par morceaux sur $[a;b]$, il n'y a aucun problème, $\int_a^b f(t)\,dt$ existe.

I.1 Intégrale de fonctions continues par morceaux sur $[a;+\infty[$

Dans la suite a désigne un nombre réel.

Définition 1.2. Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est dite *convergente*, si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Si tel est le cas, on note cette limite $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est *divergente*.

I.2 Intégrale de fonctions continues par morceaux sur $]0;b]$

Dans la suite b désigne un réel strictement positif.

Définition 1.3. Soit $f :]0,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, l'intégrale $\int_0^b f(t)\,dt$ est dite *convergente*, si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$ admet une limite finie quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Si tel est le cas, on note cette limite $\int_0^b f(t)\,dt$:

$$\int_0^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,dt.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est *divergente*.

Propriété 1.4. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]0;b]$ telle que f admet une limite finie en 0 (f est prolongeable par continuité en 0). Alors l'intégrale $\int_0^b f(t)\,dt$ converge.

I.3 Adaptation aux fonctions définies sur $]0;+\infty[$

À l'aide de la relation de Chasles, on justifie la définition de l'intégrale impropre aux deux bornes.

Définition 1.5. Soient f une fonction continue par morceaux sur $]0;+\infty[$ et $c \in]0;+\infty[$ si les intégrales $\int_0^c f(t)\,dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t)\,dt$ sont convergentes alors on dit que **l'intégrale** $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

est convergente, et on pose :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^c f(t)\,dt + \int_c^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Sinon, on dit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est divergente (ou diverge).

II Propriétés de l'intégrale

On retrouve les propriétés habituelles de l'intégrale classique. Dans la suite I désigne indifféremment un intervalle du type $[a, +\infty[$, $]0, b]$ ou $]0; +\infty[$ et on note

$$\int_I f(t)dt$$

l'intégrale impropre convergente sur l'un de ces trois types d'intervalles.

Propriété 1.6 (Linéarité). Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I , admettant des intégrales impropres convergentess sur I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + \lambda g$ admet une intégrale impropre sur I et :

$$\int_I (f + \lambda g)(t)dt = \int_I f(t)dt + \lambda \int_I g(t)dt.$$

Propriété 1.7 (Positivité). Soit f une fonction continue par morceaux sur I positive, admettant une intégrale impropre convergente sur I. On a

$$\int_I f(t)dt \geqslant 0.$$

Propriété 1.8 (Croissance). Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I admettant des intégrales impropres convergentes sur I. Si $\forall t \in I,\ f(t) \leqslant g(t)$, alors $\displaystyle\int_I f(t)dt \leqslant \int_I g(t)dt$.

Théorème 1.9 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; +\infty[$. Soit $c \in [a, +\infty[$. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature, et si elles convergent, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt$$

III Critères de convergence pour les fonctions positives

Dans la suite a désigne un réel et f et g désignent deux fonctions continues par morceaux et **positives** sur $[a; +\infty[$.
Tous les résultats sont adaptables pour les fonctions définies sur $]0; b]$.

III.1 Critère de majoration

Théorème 1.10 (Critère de majoration)

Si il existe $c \in [a;+\infty[$ tel que

$$\forall t \in [c;+\infty[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t),$$

on a :

- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{\infty} g(t)\,dt$ diverge.

III.2 Critère d'équivalence

Théorème 1.11 (Critère d'équivalence)

Si

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t),$$

alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ sont de même nature. les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge
2. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

III.3 Intégrales de référence et critère de Riemann

Les intégrales de Riemann sont des intégrales qui seront considérées comme des références pour la suite. Le résultat ci-dessous est un résultat de cours qui sera donc utilisé sans avoir besoin de le redémontrer.

Théorème 1.12 (Intégrales de Riemann)

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Dans ce cas $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha-1}$.

Théorème 1.13 (Fonctions logarithmes et exponentielles)

- $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt$ est une intégrale convergente et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt = -1$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\ dt$ est une intégrale convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\ dt = \frac{1}{\alpha}$.

Propriété 1.14 (Critère de Riemann). Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $[a;+\infty[$.

- Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
- Si il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

IV Intégrales absolument convergentes

Dans la suite I désigne indifféremment un intervalle du type $[a,+\infty[$, $]0,b]$ ou $]0;+\infty[$ et on note

$$\int_I f(t)dt$$

l'intégrale impropre convergente sur l'un de ces trois types d'intervalles.

IV.1 Définition et propriétés

Définition 1.15 (Absolue convergence d'une intégrale). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|\,dt$ est convergente

Théorème 1.16 (Lien absolue convergence et convergence)

Une intégrale absolument convergente est convergente.
De plus, si f est absolument convergente sur I, alors :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$$

Théorème 1.17

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b[)$.
Si g est positive localement au voisinage de b et si $f(t) \underset{t\to b}{=} o(g(t))$, alors la convergence de l'intégrale de g implique la convergence absolue de l'intégrale de f .

V Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle du type $[a,b]$ ou $[a;+\infty$, ou $]0;b]$ ou $]0;+\infty[$.

V.1 Passage à la limite sous l'intégrale

Théorème 1.18 (de convergence dominée (Admis))

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles vérifiant :

1. pour tout réel $t \in I$, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel noté $f(t)$,
2. la fonction f définie pour tout $t \in I$ par $f : t \to f(t)$ est continue par morceaux.
3. (hypothèse de domination) il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^+$ positive, continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et
$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

V.2 Dérivation sous le signe intégral

Ici J désigne un intervalle non trivial.

Théorème 1.19 (de dérivation sous le signe intégrale (admis))

On considère une fonction $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ définie sur $J \times I$ à valeurs réelles.
On suppose que :

1. Pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur I.
2. f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur J et sur I par rapport à chacune de ses variables.
3. (hypothèse de domination) il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^+$ positive, continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant
$$\forall x \in I, \forall t \in I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et
$$\forall x \in J,\ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Déterminant d'une matrice carrée

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel.

Théorème 2.1 (Definition de déterminant)

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée *déterminant*, telle que :

1. le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne ;
2. l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ;
3. le déterminant de la matrice unité I_n vaut 1.

Notation. Cette application est notée det. Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, son déterminant est noté de la manière suivante :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

II Propriétés du déterminant

II.1 Deux propriétés fondamentales

Propriété 2.2. Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Propriété 2.3. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout scalaire λ de $\mathbb{K}$, on a :

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

II.2 Effet des opérations élémentaires

Théorème 2.4

Le déterminant d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne change pas, si à une colonne de A on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes de A.

II.3 Déterminant d'une matrice triangulaire

Théorème 2.5

Le déterminant d'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est égal au produit des éléments diagonaux de cette matrice.

II.4 Déterminants et matrices inversibles

Théorème 2.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible ;
2. le déterminant de A est non nul, (i.e. $\det(A) \neq 0$).

II.5 Déterminant d'un produit de matrices

Théorème 2.7 (Déterminant d'un produit)

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Corollaire 2.8. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Corollaire 2.9. Deux matrices semblables ont même déterminant.

II.6 Déterminant de la transposée d'une matrice carrée

Théorème 2.10 (Déterminant de la transposée)

Une matrice et sa transposée ont même déterminant :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \det(A) = \det(A^T)$$

Corollaire 2.11 (Combinaison linéaire sur les lignes)**.** Le déterminant d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne change pas, si à une ligne de A on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes de A.

II.7 Développement par rapport à la $j^{\text{ième}}$ colonne

Théorème 2.12

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \Delta_{kj}^{A}$$

où, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Δ_{kj}^{A} est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en ôtant la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.

II.8 Développement par rapport à la $i^{\text{ième}}$ ligne

Théorème 2.13

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{ik}^{A}$$

où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Δ_{ik}^{A} est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en ôtant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne.

III Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

III.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Définition 2.14. On appelle *déterminant de la famille* $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est constituée des coordonnées du vecteur x_j dans $\mathcal{B}$. On le note $\det\limits_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$.

Théorème 2.15

1. $\det\limits_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est linéaire par rapport à chaque vecteur x_i.
2. $\det\limits_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est nul dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.
3. L'échange de deux vecteurs dans la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ a pour effet de multiplier le déterminant par -1 : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,
$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$
4. $\det\limits_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ ne change pas si à l'un des x_i, on ajoute une combinaison linéaire des autres.

III.2 Caractérisation des bases

Théorème 2.16

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E ;
2. $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre de E ;
3. pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\det\limits_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas nul ;
4. il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det\limits_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ ne soit pas nul.

III.3 Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base de E

Définition 2.17. Le *déterminant* de u est le déterminant de la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ de E. On le note $\det(u)$.

Théorème 2.18

Si u est un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on a :

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big).$$

III.4 Caractérisation des automorphismes

Théorème 2.19

Un endomorphisme de E est bijectif si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

III.5 Déterminant et composition

Théorème 2.20

Soit u et v deux endomorphismes de E. Alors

$$\det(u \circ v) = \det(u)\, \det(v).$$

Corollaire 2.21. Si u est inversible, on a :

$$\det\left(u^{-1}\right) = (\det u)^{-1} = \frac{1}{\det(u)}.$$

III.6 Comatrice et inverse d'une matrice carrée

Définition 2.22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle comatrice de A la matrice notée $\mathrm{com}(A)$ carré de taille n dont le coefficient général est

$$\gamma_{i,j} = \left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}^{A}\right)$$

ou Δ_{ij}^{A} est le déterminant de la matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ issue de la matrice A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

Propriété 2.23. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A.(com(A))^T = \det(A) \times I_n.$$

Corollaire 2.24. Si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(com(A))^T.$$

III.7 Géométrie dans l'espace

Propriété 2.25.

- Dans le plan, deux vecteurs u et v sont colinéaires ssi leur déterminant est nul.
- Dans l'espace, trois vecteurs u, v et w sont coplanaires ssi leur déterminant est nul.

I Généralités

Dans cette partie, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera une suite d'éléments de $\mathbb{R}$

I.1 Vocabulaire

Définition 3.1 (Série, terme général, sommes partielles). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **série** associée à la suite $(u_n)_n$. On la note $\sum u_n$.
- u_n est le **terme général** de la série $\sum u_n$.
- S_n est la **somme partielle** d'indice n de la série $\sum u_n$.

Définition 3.2 (Convergence d'une série).

- La série $\sum u_n$ de terme général u_n est dite **convergente** si la suite $(S_n)_n$ de ses sommes partielles est convergente dans $\mathbb{R}$.
- Une série qui ne converge pas est dite **divergente.**
- **Dans le cas où $\sum u_n$ converge, on appelle somme de cette série la limite de la suite $(S_n)_n$ et on la note**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

I.2 Un exemple fondamental

Propriété 3.3 (Séries géométriques). Soit $z \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. La série $\sum z^n$ est appelé série géométrique de raison z.

1. $S_n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.
2. La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$ et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

3. La série $\sum nz^{n-1}$ s'appelle la série dérivée de la série géométrique de raison z. Cette série converge ssi $|z| < 1$ et dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

I.3 Condition nécessaire de convergence

Propriété 3.4 (Convergence du terme général). Si la série $\sum u_n$ est convergente alors la suite u_n converge vers zéro.

Définition 3.5 (divergence grossière). Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite **grossièrement divergente.**

I.4 Séries téléscopiques

Propriété 3.6. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La suite (u_n) converge.
2. La série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge

I.5 Linéarité de la somme et reste en cas de convergence

Propriété 3.7 (Linéarité de la somme). Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. Soit λ un élément de $\mathbb{R}$.
La série $\sum \lambda u_n + v_n$ est convergente et sa somme est :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k + v_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

I.6 Reste d'ordre n

Définition 3.8 (Reste d'ordre n). Dans la cas ou la série $\sum u_n$ converge, on note s la somme de cette série.
Le reste d'ordre n de la série R_n est définie par $R_n = s - S_n$.
On le note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Propriété 3.9 (Propriétés de $(R_n)_n$). Soit $(R_n)_n$ la suite des restes d'une série convergente $\sum u_n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = R_{n-1} - R_n$.
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$.

I.7 Relative importance des premiers termes

Propriété 3.10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $n_0 \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalents.

- La série associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- La série associée à la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente

II Séries à termes positifs

Dans tout ce paragraphe, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ seront des suites réelles positives.

II.1 Caractérisation de la convergence

Propriété 3.11 (croissance). Si $(u_n)_n$ est une suite positive alors la série $\sum u_n$ est croissante

Propriété 3.12 (caractérisation de la convergence). Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La série $\sum u_n$ converge.
2. La suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est majorée.

Et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$.

II.2 Série de Riemann

Propriété 3.13 (Séries de Riemann). La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

II.3 Comparaison série intégrale

.

Théorème 3.14 (Comparaison série-intégrale)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0; +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction positive, continue et décroissante. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. La série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge.
2. L'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

II.4 Critère de convergence pour les séries à termes positifs

Propriété 3.15 (Critère de majoration). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives. Supposons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

1. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Propriété 3.16 (Critère d'équivalence). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de mêmes natures.

II.5 Règle de d'Alembert

Propriété 3.17 (Règle de d'Alembert). Soit (u_n) une suite strictement positive et l un réel positif.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \tag{3.1}$$

- Si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $l < 1$, $\sum u_n$ converge.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

II.6 Critère de Riemann

Propriété 3.18 (Critère de Riemann). Soit (u_n) une suite positive.
S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_n \in \mathbb{N}$ soit borné, alors la série $\sum u_n$ converge

III Séries absolument convergentes

Dans ce paragraphe, $(u_n)_n$ sera une suite quelconque de réels.

III.1 Série exponentielle

Théorème 3.19

Pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Cette série est appelé série exponentielle.

III.2 Convergence absolue

Définition 3.20. Une série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si $\sum |u_n|$ converge.

Propriété 3.21 (Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence). Une série absolument convergente est convergente et dans ce cas on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

III.3 Série géométrique

Propriété 3.22 (Absolue convergence des séries géométriques). Soit $z \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- La série $\sum z^n$ converge.
- La série $\sum z^n$ est absolument convergente.
- $|z| < 1$.

En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}$$

III.4 Séries alternées

Définition 3.23. On dit qu'une série réelle $\sum u_n$ est **alternée si, pour tout** $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \leqslant 0$.

Théorème 3.24 (Critère spécial des séries alternées de Leibniz)

Soit $\sum u_n$ une série telle que :

- $\sum u_n$ est alternée (i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n u_{n+1} \leqslant 0$) ;
- la suite des valeurs absolues $(|u_n|)_n$ est décroissante (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}| \leqslant |u_n|$) ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Alors :

1. $\sum u_n$ converge ;
2. le reste d'ordre n est du signe de u_{n+1} et vérifie

$$|R_n| := \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Dans tout ce chapitre E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Éléments propres

I.1 Pour un endomorphisme

Définition 4.1 (Valeur propre de f). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un scalaire λ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f si il existe un vecteur $x \in E$ vérifiant :

- $x \neq 0_E$
- $f(x) = \lambda x$

Définition 4.2 (Spectre). L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice est appelé **spectre** et est noté $Sp(f)$.

Théorème 4.3

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. λ est une valeur propre de f.
2. $f - \lambda id_E$ n'est pas injective.

Corollaire 4.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. 0 est une valeur propre de f si et seulement si f n'est pas injective.

Propriété 4.5.

$$\lambda \in Sp(f) \iff \det(f - \lambda id_E) = 0$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

Définition 4.6 (Vecteurs propres). On dit que $x \in E$ est un vecteur propre pour f si il vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $x \neq 0_E$.
2. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Ce scalaire est alors unique et est appelé la valeur propre associé à x. On dit également que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Définition 4.7 (Espace propre associé à λ). Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de u.
Le sous espace vectoriel $\ker\{f - \lambda Id_E\}$ est appelé sous espace propre associé à λ. On le note $E_\lambda(f)$.

$$E_\lambda(f) = \ker\{\lambda Id_E - f\} = \ker\{f - \lambda Id_E\} = \{x \in E / f(x) = \lambda x\}.$$

Théorème 4.8

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f. Alors les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres sont en somme directe.

Théorème 4.9

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs propres associés. Alors $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre de E.

Corollaire 4.10. Une somme finie de sous espaces propres associées à des valeurs propres distinctes deux à deux est directe.

Corollaire 4.11. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont n valeurs propres **distinctes** et si $u_1, \ldots, u_n$ sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres alors la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E. On dit que c'est une **base de vecteurs propres**.

Corollaire 4.12. Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n admet au plus n valeurs propres distinctes.

I.2 Pour une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}$ avec $n \geqslant 2$.

Définition 4.13 (Valeur propre de A). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un scalaire λ est une **valeur propre** de la matrice A si il existe une matrice colonne $X \in A \in \mathcal{M}_{n,1}\mathbb{K}$ vérifiant :
- $X \neq 0$
- $AX = \lambda X$

Propriété 4.14 (caractérisation des valeurs propres). Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. λ est valeur propre de A.
2. La matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
3. $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Définition 4.15 (Vecteurs propres). On dit qu'une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre pour A si il vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $X \neq 0$.
2. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$. Ce scalaire est alors unique et est appelé la valeur propre associé à X. On dit également que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Définition 4.16 (Espace propre $E_\lambda(A)$). Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.
Le sous espace vectoriel $\ker\{A - \lambda I_n\}$ est appelé sous espace propre associé à λ. On le note $E_\lambda(A)$.

$$E_\lambda(A) = \ker\{\lambda I_n - A\} = \ker\{A - \lambda I_n\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})/AX = \lambda X\}.$$

Propriété 4.17 (Lien entre endomorphisme et matrice). Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E, et f un endomorphisme de E Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. x est un vecteur propre de f.
2. $X = \mathrm{Mat}_{(B)}(x)$ est un vecteur propre de A.

II Polynômes

II.1 Polynômes d'endomorphismes

Définition 4.18 (Polynômes d'endomorphismes).
Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme définie par

$$\forall x \in E, P(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^p(x).$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on note $P(A)$ la matrice $\sum_{k=0}^{n} a_k A^p$.

Propriété 4.19. Si x est un vecteur propre pour f associé à la valeur propre λ alors $P(f)(x) = P(\lambda)x$.

II.2 Polynômes annulateurs

Définition 4.20 (Polynômes annulateurs). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. P est un polynôme annulateur de A su $P(A) = 0$.

Propriété 4.21 (Racines et valeurs propres). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de f. Alors toute valeur propre de f est une racine de P

II.3 Polynôme caractéristique

Définition 4.22 (Polynôme caractéristique en dimension finie). Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique de** f, et on note χ_f, le polynôme suivant :

$$\chi_f(X) = \det(f - X id_E)$$

Théorème 4.23

• Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et χ_f son polynôme caractéristique.
χ_f est un polynôme de degré n de la forme :

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^n - (-1)^n \mathrm{tr}(f) X^{n-1} + \ldots + \det(f)$$

Définition 4.24 (Polynôme caractéristique χ_A). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique de** A, et on note χ_A, le polynôme suivant :

$$\chi_A(X) = \det(X I_n - A)$$

Propriété 4.25 (Lien entre endomorphisme et matrice). Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. λ est une valeur propre de A.
2. λ est une racine du polynôme caractéristique de A.

3. λ est une valeur propre de l'endomorphisme f ayant comme matrice A dans une base $\mathcal{B}$.
4. λ est une valeur propre de tout endomorphisme$f$ de E admettant A comme matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E

Propriété 4.26 (Transposée et polynôme). Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et sa transposée ont même polynôme caractéristique.

II.4 Ordre de multiplicité

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 4.27 (ordre de multiplicité d'une valeur propre). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, χ_f son polynôme caractéristique et λ une valeur propre.
On appelle **ordre de multiplicité de** λ son ordre de multiplicité en tant de racine de χ_f. On le note $m_f(\lambda)$ ou $m(\lambda)$.

Théorème 4.28 (Encadrement de la dimension des espaces propres)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre dont l'ordre de multiplicité est $m(\lambda)$. Alors on a l'encadrement suivant :

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant m(\lambda) \leqslant n$$

où $E_\lambda(f)$ désigne de le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

III Endomorphismes et matrices diagonalisables

III.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 4.29 (Endomorphisme diagonalisable). Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale

III.2 CNS de diagonalisation

Théorème 4.30 (CNS)

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est diagonalisable.
2. Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.
3. La somme des sous espaces propres de f est égale à E
4. Le polynôme caractéristique de f est scindé et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.

III.3 Condition suffisante de diagonalisation

Propriété 4.31. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si le polynôme caractéristique de f est scindé à racines simples alors f est diagonalisable

III.4 Matrice diagonalisable

Définition 4.32 (Matrice diagonalisable). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une **matrice diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

Les résultats précédents s'appliquent aux matrices.

Théorème 4.33 (CNS)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est diagonalisable.
2. Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A
3. La somme des sous espaces propres de A est égales à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
4. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{K}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous espace propre associé.

Propriété 4.34 (CS). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. Si le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable.

III.5 Exemple de diagonalisation d'une matrice

Propriété 4.35. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $(X_1, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A. On note λ_i la valeurs propres associé au vecteur propre X_i.
Alors on a $A = PDP^{-1}$ avec P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ à la base de vecteurs propres et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Lorsqu'on construit les matrices P et D on dit que l'on **diagonalise** A.
<u>Méthode générale :</u>

1. Trouver les valeurs propres de A : on calcule χ_A et on résout $\chi_A(X) = 0$. (Attention à bien regarder l'énoncé de l'exercice pour savoir si on travaille dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

2. A est-elle diagonalisable ?
   - Si χ_A n'est pas scindé, A n'est pas diagonalisable.
   - Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si A admet n valeurs propres distinctes alors chaque sous-espace propre est de dimension 1 et A est diagonalisable.
   - Sinon, on cherche une base de chaque sous-espace propre et A est diagonalise si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.
3. Si A est diagonalisable, on construit P et D :
   Si ça n'a pas été fait avant il faut trouver une base de chacun des sous-espaces propres. La réunion de toutes ces bases donne une base de vecteurs propres de A.
   On construit alors P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ à la base de vecteurs propres et dans la matrice diagonale D on met les valeurs propres correspondant à chacun des vecteurs propres de la base de vecteurs propres.

Théorème 4.36 (Matrice symétrique réelle)

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV Applications de la réduction

IV.1 Puissances de matrice

Propriété 4.37. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible telle que
$A = PBP^{-1}$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = PB^kP^{-1}$$

Propriété 4.38. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$$

Propriété 4.39. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent** ($AB = BA$). Alors pour tout entier k :

$$(A+B)^k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \qquad \text{(Formule du binôme de Newton)}$$

IV.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 4.40. On dit qu'une suite numérique de complexe u est définie par une **relation homogène de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** lorsqu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \tag{4.1}$$

Définition 4.41 (Équation caractéristique). On appelle **équation caractéristique** associée à cette suite l'équation suivante : $x^2 - ax - b = 0$.

Théorème 4.42

On considère une suite numérique complexe u définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On note (E) l'équation caractéristique associée à cette suite.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
- Si l'équation caractéristique n'admet qu'une solution réelle r alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ u_n = (\lambda + \mu n) r^n$$
- Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

On détermine les valeurs de λ et μ grâce à u_0 et u_1.

I Suites de fonctions

I.1 Convergence simple et uniforme

Dans tout ce chapitre, on considérera des fonctions à valeurs réelles.

Définition 5.1. Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement** vers f si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Autrement dit, à $x \in \mathcal{D}$ fixé, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$. On notera : $f_n \xrightarrow{S} f$.

1 Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par :

$$f_n\colon x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

En passant au logarithme, démontrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction exponentielle.

Notation. Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. On note :

$$\|f\|_{\infty,\mathcal{D}} = \sup_{x\in\mathcal{D}} |f(x)|.$$

Définition 5.2. Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers f si :

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{\infty,\mathcal{D}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On notera : $f_n \xrightarrow{U} f$.

Propriété 5.3. Si une suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f, alors elle converge aussi simplement.

Méthode (Montrer qu'une suite converge uniformément). Pour démontrer qu'une suite de fonctions converge uniformément, on commencera par étudier sa converge simple pour connaître sa limite éventuelle. On pourra ensuite essayer de majorer la quantité $\|f_n - f\|_{\infty,\mathcal{D}}$ par le terme général d'une suite convergente.

2 Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{n}x\mathrm{e}^{-nx}.$$

1. Démontrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé.
   a. Dresser le tableau de variations de f_n.
   b. En déduire que f_n atteint son maximum en $1/n$ et déterminer ce maximum.
   c. Démontrer que $(f_n)_n$ converge uniformément.

II Séries de fonctions

II.1 Convergence simple, uniforme et normale

Les notions vues au chapitre 3 s'étendent naturellement aux suites de fonctions. Elles font l'objet de l'étude qui suit.

Définition 5.4 (Série, terme général, sommes partielles).
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

- La suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **série** associée à la suite $(f_n)_n$. On la note $\sum f_n$.
- f_n est le **terme général** de la série $\sum f_n$.
- S_n est la **somme partielle** d'indice n de la série $\sum f_n$.

Définition 5.5.
Avec les notations précédentes, la série $\sum f_n$ de terme général f_n est dite **simplement convergente** (respectivement **uniformément convergente**) si la suite $(S_n)_n$ de ses sommes partielles est simplement convergente (respectivement uniformément convergente). Dans le cas où $\sum f_n$ converge, on appelle **somme** de cette série la limite de la suite $(S_n)_n$ et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Définition 5.6. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que la série de terme général $(f_n)_n$ **converge normalement** vers f lorsque la série numérique $\sum_n \|f_n\|_{\infty,\mathcal{D}}$ converge.

Méthode (Montrer qu'un série converge normalement). Pour démontrer qu'une série de fonctions converge normalement, on pourra essayer de majorer le terme général de la série (indépendamment de x) par le terme général d'une série numérique convergente de référence.

3 Etudier la convergence normale de la série des fonctions $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$ avec $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.7

Toute série normalement convergente est uniformément convergente.

III Propriétés de la limite

III.1 Continuité

Théorème 5.8

La limite **uniforme** d'une suite de fonctions continues est continue.

III.2 Intégration sur un segment

Théorème 5.9

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **continues** sur un segment $[a,b]$. Si elle converge **uniformément** vers une fonction f, alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4 Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}.$$

1. Démontrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.
2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire qu'il n'y a pas convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$.

Corollaire 5.10

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **continues** sur un segment $[a,b]$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge **uniformément** sur $[a,b]$, alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right) = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

III.3 Dérivabilité

Théorème 5.11

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. On suppose que :

(i) $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f sur I ;

(ii) $(f_n')_n$ converge uniformément vers une fonction g sur I.

Alors, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Corollaire 5.12

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. On suppose que :

(i) $\sum f_n$ converge simplement sur I ;

(ii) $\sum f_n'$ converge uniformément sur I.

Alors, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.

IV Théorème de convergence dominée

Théorème 5.13

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

(i) $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f ;

(ii) la fonction f est continue par morceaux sur I ;

(iii) Il existe une fonction φ continue par morceaux sur I et **intégrable** telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}tn \underset{\longrightarrow}{\rightarrow} \infty \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans tout ce chapitre E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension finie ou infinie)

I Produit scalaire et norme

I.1 Définition et exemples fondamentaux

Définition 6.1 (Produit scalaire). On dit qu'une application $\langle .|. \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ est un **produit scalaire** sur E si elle vérifie les propriétés suivantes :

- L'application $\langle .|. \rangle$ est bilinéaire :

$$\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) \in E \times E \times E, \qquad \forall(a, b) \in \mathbb{R}$$

$$\langle a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{y}|\overrightarrow{z}\rangle = a\langle\overrightarrow{x}|\overrightarrow{z}\rangle + b\langle\overrightarrow{y}|\overrightarrow{z}\rangle$$
$$\langle\overrightarrow{x}|a\overrightarrow{y} + b\overrightarrow{z}\rangle = a\langle\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}\rangle + b\langle\overrightarrow{x}|\overrightarrow{z}\rangle$$

- L'application $\langle .|. \rangle$ est symétrique :

$$\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E \times E, \qquad \langle\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}\rangle = \langle\overrightarrow{y}|\overrightarrow{x}\rangle$$

- L'application $\langle .|. \rangle$ est définie :

$$\langle\overrightarrow{x}|\overrightarrow{x}\rangle = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

- L'application $\langle .|. \rangle$ est positive :

$$\forall\overrightarrow{x} \in E, \qquad \langle\overrightarrow{x}|\overrightarrow{x}\rangle \geqslant 0$$

Définition 6.2.

- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire s'appelle un **espace préhilbertien réel**.
- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'un produit scalaire s'appelle un **espace euclidien**.

Théorème 6.3 (Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$)

Soit n un entier naturel L'application $\langle .|. \rangle$ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$\langle\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

avec $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\overrightarrow{y} = (y_1, \dots, y_n)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ que l'on appelle **le produit scalaire canonique sur** $\mathbb{R}^n$.

Propriété 6.4 (Produits scalaires canoniques).

- L'application $\langle .|. \rangle$ définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par

$$\langle X|Y\rangle = X^T \times Y$$

  est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}); \langle .|. \rangle)$ est un espace euclidien

- L'application $\langle . | . \rangle$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par
$$\langle A | B \rangle = \mathrm{tr}(A^T \times B)$$
est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \langle . | . \rangle)$ est un espace euclidien
- L'application $\langle . | . \rangle$ définie sur $\mathcal{C}([a;b],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$ par
$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$$
est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$. $(\mathcal{C}([a;b],\mathbb{R}); \langle . | . \rangle)$ est un espace préhilbertien.
- L'application $\langle . | . \rangle$ définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ par
$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. $(\mathbb{R}[X]; \langle . | . \rangle)$ est un espace préhilbertien.

I.2 Norme et distance euclidiennes

Définition 6.5 (Norme associée au produit scalaire). Soit $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace préhilbertien. On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle . | . \rangle$, l'application, notée $||.||$, de E dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \qquad ||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{x} \rangle}$$

Définition 6.6 (Vecteur unitaire). Soit $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace préhilbertien et $\overrightarrow{x} \in E$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{x}$ est **unitaire** s'il vérifie $||\overrightarrow{x}|| = 1$.

Définition 6.7 (Distance euclidienne). Soit $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace préhilbertien. On appelle **distance euclidienne** associée au produit scalaire $\langle . | . \rangle$, l'application, notée $d(.,.)$, de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}||$$

I.3 Propriétés

Propriété 6.8 (Identité remarquable). Soit $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace préhilbertien et $||.||$ la norme euclidienne associée.
Alors, pour tout $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$ on a :
- $||\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}||^2 = ||\overrightarrow{x}||^2 + 2\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} \rangle + ||\overrightarrow{y}||^2$
- $||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}||^2 = ||\overrightarrow{x}||^2 - 2\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} \rangle + ||\overrightarrow{y}||^2$

Propriété 6.9 (Identité de polarisation). Soit $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace préhilbertien et $||.||$ la norme euclidienne associée.
Alors, pour tout $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$ on a :
- $\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} \rangle = \dfrac{||\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}||^2 - ||\overrightarrow{x}||^2 - ||\overrightarrow{y}||^2}{2}$
- $\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} \rangle = \dfrac{||\overrightarrow{x}||^2 + ||\overrightarrow{y}||^2 - ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}||^2}{2}$
- $\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} \rangle = \dfrac{||\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}||^2 - ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}||^2}{4}$

Propriété 6.10 (Identité du parallélogramme). Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien et $||.||$ la norme euclidienne associée.
Alors, pour tout $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$ on a :

$$||\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}||^2 + ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}||^2 = 2(||\overrightarrow{x}||^2 + ||\overrightarrow{y}||^2)$$

Théorème 6.11 (Inégalité de Cauchy Schwarz)

Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien et $||.||$ la norme euclidienne associée.
Alors, pour tout $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$ on a :

$$|\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} \rangle| \leqslant ||\overrightarrow{x}|| \; ||\overrightarrow{y}||$$

De plus les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $|\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} \rangle| = ||\overrightarrow{x}|| \; ||\overrightarrow{y}||$ (cas d'égalité) si
2. La famille $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est liée.
3. Les vecteurs x et y sont colinéaires.

Propriété 6.12 (Propriété de la norme). Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien et $||.||$ la norme euclidienne associée. Alors on a :

- $\forall \overrightarrow{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad ||\lambda \overrightarrow{x}|| = |\lambda| ||\overrightarrow{x}||$;
- $\forall \overrightarrow{x} \in E, \qquad ||\overrightarrow{x}|| = 0 \iff \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$;
- $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2, \qquad ||\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}|| \leqslant ||\overrightarrow{x}|| + ||\overrightarrow{y}||$ (**Inégalité triangulaire**).

II Orthogonalité

Dans toute la suite du chapitre $(E, \langle .|. \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

II.1 Définitions

Définition 6.13 (Vecteurs orthogonaux). Soit $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ deux vecteurs de E. On dit que $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont **orthogonaux** si

$$\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} \rangle = 0$$

On note alors $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}$.

Définition 6.14 (Famille orthogonale). Soit $(\overrightarrow{u}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(\overrightarrow{u}_i)_{i \in I}$ est une **famille orthogonale** si pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, $\overrightarrow{u}_i \perp \overrightarrow{u}_j$.

Définition 6.15 (Famille orthonormale). Soit $(\overrightarrow{u}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(\overrightarrow{u}_i)_{i \in I}$ est une **famille orthonormale ou orthonormée** si elle est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires (pour tout $i \in I$, $||\overrightarrow{u}_i|| = 1$).

Définition 6.16 (Orthogonal à une partie). Soit $u \in E$ et A une partie non vide de E. On dit que u **est orthogonal à** A si $\forall a \in A$, $u \perp \overrightarrow{a}$.

Définition 6.17 (Parties orthogonales). Soient A et B deux parties non vides de E. On dit que **les parties** A **et** B **sont orthogonales** si pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, $a \perp b$. On note alors $A \perp B$.

Définition 6.18 (Orthogonal d'un ensemble). Soit A une partie non vide de E. On appelle **orthogonal de** A, et on note $A^\perp$, l'ensemble :

$$A^\perp = \{\vec{u} \in E \text{ tel que } \forall \vec{a} \in A, \langle \vec{u} | \vec{a} \rangle = 0\}$$

II.2 Propriétés

Propriété 6.19. Une famille orthogonale $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E ne contenant pas le vecteur nul est une famille libre.

Théorème 6.20 (Théorème de pythagore)

Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. Alors :

$$||\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_n||^2 = ||\vec{u}_1||^2 + ||\vec{u}_2||^2 + \ldots + ||\vec{u}_n||^2$$

Propriété 6.21. Soit A une partie non vide de E. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 6.22. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
- $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$.
- $F \subset (F^\perp)^\perp$

Propriété 6.23. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F.
Alors un vecteur $\vec{u}$ de E est orthogonal à F si et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs de la base.

II.3 Orthonormalisation de Gramm - Schmidt

Théorème 6.24 (Procédé d'orthonormalisation de Gramm - Schmidt)

Soit $(e_1, \ldots, e_N)$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille orthonormale $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ vérifiant :

1. $\forall n \in [\![1; N]\!], \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n) = \mathrm{vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$
2. $\forall n \in [\![1; N]\!], \qquad \langle e_n | \varepsilon_n \rangle > 0$

II.4 Bases orthonormales

Propriété 6.25. Soit E un espace euclidien (préhilbertien de dimension finie). Alors il existe une base orthonormée de E.

Propriété 6.26. Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée (BON) de E.
Soit $\vec{u} \in E$. On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
Alors on a, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i = \langle \vec{u} | \varepsilon_i \rangle$.
En résumé, on a $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{u} | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$.

Propriété 6.27. Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E.
• Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $||\overrightarrow{u}||^2 = \sum_{i=1}^{n} (\langle \overrightarrow{u} | \varepsilon_i \rangle)^2$
• Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$, $\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \overrightarrow{u} | \varepsilon_i \rangle \times \langle \overrightarrow{v} | \varepsilon_i \rangle$.

III Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

III.1 Supplémentaire orthogonal

On rappelle que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que F et G sont supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$.
On note alors $E = F \oplus G$.

Définition 6.28 (Supplémentaire orthogonal). Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que G est un **supplémentaire orthogonal** de de F si F et G son supplémentaires et $F \perp G$.
On note alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$

III.2 Projection orthogonale

Dans cette partie $(E, \langle . | . \rangle$ est un espace préhilbertien et F est un sous espace de E de dimension finie n.

Théorème 6.29 (Définition : Projeté orthogonal d'un vecteur de E)

Soit x un vecteur de E. il existe un unique vecteur de F, noté $P_F(x)$ vérifiant :

1. $P_F(x) \in F$;
2. $x - P_F(x) \in F^\perp$

Si $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ est une base orthonormale de F, on a

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x | \epsilon_i \rangle \, \epsilon_i$$

Ce vecteur $P_F(x)$ est appelé le projeté orthogonal de x sur F.
L'application

$$P_f \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & P_F(x) \end{array}$$

est appelé projecteur orthogonal.

Corollaire 6.30 (Somme directe de F et $F^\perp$)**.** Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires
Soit $\overrightarrow{x} \in E$.
Tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme

$$x = P_F(x) + x - P_F(x)$$

et on a :

$$||\overrightarrow{x}||^2 = ||\overrightarrow{x} - p_F(\overrightarrow{x})||^2 + ||p_F(\overrightarrow{x})||^2$$

Corollaire 6.31. Soit F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**. Alors on a $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.

Propriété 6.32. Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et p_F la projection orthogonale sur F.

1. Si $\overrightarrow{x} \in F$, $p_F(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$
2. $\forall \overrightarrow{x} \in E$, $p_F(\overrightarrow{x}) \in F$ et $\overrightarrow{x} - p_F(\overrightarrow{x}) \in F^\perp$
3. $\forall \overrightarrow{x} \in E$, $\overrightarrow{x} = p_F(\overrightarrow{x}) + p_{F^\perp}(\overrightarrow{x})$
4. p_F est un projecteur de E.

III.3 Distance à un sous-espace

Définition 6.33 (Distance à un sous espace). Soit A une partie non vide de E et $\overrightarrow{x} \in E$. On appelle **distance de $\overrightarrow{x}$ à** A, et on note $d(\overrightarrow{x}, A)$, le réel :

$$d(\overrightarrow{x}, A) = \inf_{\overrightarrow{a} \in A} d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}) = \inf_{\overrightarrow{a} \in A} ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||$$

Théorème 6.34

Soit F une sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $\overrightarrow{x} \in E$. Alors on a :

$$d(\overrightarrow{x}, F) = d(\overrightarrow{x}, p_F(\overrightarrow{x})) = ||\overrightarrow{x} - p_F(\overrightarrow{x})||$$

où $p_F(\overrightarrow{x})$ désigne le projeté orthogonal de $\overrightarrow{x}$ sur F.
De plus $p_F(\overrightarrow{x})$ est l'unique vecteur de F tel que $d(\overrightarrow{x}, F) = d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{f})$ où $\overrightarrow{f} \in F$.