Exercice 0 Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles $n \times n$ et soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On rappelle que A est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable dans une base orthogonale de vecteurs propres.

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & a^T x \end{array}$$

1. Calculer ∇f
2. Montrer que f est différentiable et calculer df
3. Vérifier la relation $df(x)(h) =< \nabla f(x), h >$

Exercice 2 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction f définie ci-dessous est différentiable et calculer sa différentielle :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^T Ax \end{array}$$

Exercice 3 Soit $S_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles 2×2 et soit $A \in S_2(\mathbb{R})$. On pose :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^T Ax \end{array}$$

1. En utilisant l'exercice 0, donner une expression simple de f dans une base convenable.
2. Discuter suivant les valeurs propres de A la forme des lignes de niveau.

Exercice 4 Dire si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, convexes.

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ et } e^x - y \leq 0\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x < 2y - x^2\}$

Exercice 5 On cherche à minimiser la fonction de $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$f(x, y) = -2x + y$$

On suppose de plus que x et y sont soumis aux contraintes :

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\geq 6 \\ -x + y &\leq 3 \\ x &\leq 2 \\ x \geq 0 \quad y &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Rappeler pourquoi l'ensemble des contraintes est convexe.
2. Représenter sur un dessin les lignes de niveau de f et en déduire la solution du problème.

Exercice 6

1. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 5,\ y \geq 2 \text{ et } x \geq 2\}$. Décrire le cône tangent à A en $(2, 2)$ et en $(3, 2)$.
2. Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \text{ et } x \geq y^2\}$. Décrire le cône tangent à B en $(0, 0)$ et en $(1/2, 1/4)$.