Exercice 0 Soient f et g deux fonctions différentiables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si chacune est convexe, la somme est-elle convexe ? la différence ? et le produit ?
2. Donner des conditions suffisantes simples pour lesquelles la composée $g \circ f$ est convexe.

Exercice 1 Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions convexes sur un espace vectoriel X, indicée par un ensemble quelconque I. Montrer que la fonction f qui à tout x associe la fonction $\sup\limits_{i\in I} f_i(x)$ est convexe.

Exercice 2 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{S}_n$ des matrices carrées à coefficients réels et symétriques. Il se trouve que beaucoup de problèmes d'optimisation moderne ont pour variables des matrices et qu'il est donc intéressant de considérer ces matrices comme les variables de base pour notre calcul différentiel. On sait que toute matrice $A \in \mathbb{S}_n$ est diagonalisable et les valeurs propres de A sont réelles.

1. Soit $A \in \mathbb{S}_n$ et soient $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthonormée de vecteurs propres associés. Vérifier que :
$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k e_k^t$$
2. Calculer $e_n^t A e_n$.
3. Prenons maintenant n'importe quel vecteur unitaire u. Montrer que $u^t A u \leq \lambda_n$.
4. En déduire que $\lambda_n = \max\limits_{u \text{ t.q. } \|u\|_2=1} u^t A u$.
5. On considère maintenant λ_n comme fonction de la matrice A et on veut montrer que c'est une fonction convexe. Montrer que pour un u unitaire donné, la fonction f_u qui à A associe $u^t A u$ est linéaire et donc convexe.
6. Une fonction qui est définie par le maximum sur une famille indicée de fonctions convexes est-elle elle-même convexe ? Si oui, en déduire que la fonction λ_n est convexe.

Exercice 3 Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions convexes différentiables sur un espace vectoriel X, indicée par un ensemble **fini** I. On définit :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & X & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \max\limits_{i\in I} f_i(x) \end{array}$$

Soit $x_0 \in X$ tel que le maximum n'est atteint que pour un seul indice i_0 ($\exists! i_o \in I : f(x_0) = f_{i_0}(x_0)$). Montrer que f est différentiable en x_0 et donner son gradient en x_0. Faire un dessin dans le cas où les f_i sont affines et $X = \mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = xy$. Cette fonction est-elle convexe ?
2. On considère n réalisations $Y_1, \ldots, Y_n$ d'une variable aléatoire Y de loi $p_1\phi(\mu_1, \sigma^2) + p_2\phi(\mu_2, \sigma^2)$ et on suppose σ^2 connu. Donner la log-vraisemblance des observations. Cette fonction a-t-elle intuitivement une raison de ne pas être concave ?