Exercice 1 On considère le problème du sac à dos. Etant donnés des biens de valeurs respectives p_i et de volume v_i pour $i = 1, \ldots, n$, on veut rassembler les biens constituant un butin de valeur maximale sous une contrainte de volume donné V. On se donne les valeurs suivantes

$$p = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 14 \end{bmatrix} \text{ et } v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

et on prendra $V = 4$.

a. Donner la relaxation lagragienne du problème.
b. Tracer la fonction duale $\theta(u)$.
c. Donner la solution optimale duale puis proposer une solution primale.

Exercice 2 On considère le problème d'affectation avec contrainte de budget. Etant donné un ensemble de machines M et un ensemble de taches N, de même cardinal, il faut affecter une machine à chaque tache. Le temps employé par la machine i à la tache j est de c_{ij}. Le coût de cette affectation est de c_{ij}. On ne veut pas dépasser un coût total de C. Le but est de choisir une affectation qui dure le moins longtemps avec un coût inférieur ou égal à C.

a. Proposer une formulation de ce problème sous la forme d'un problème linéaire avec contraintes binaires.
b. Proposer une relaxation lagrangienne de ce problème.

Exercice 3 On considère un ensemble de dépôts $N = \{1, \ldots, n\}$ et un ensemble de clients $M = \{1, \ldots, m\}$. On suppose qu'il y a un coût fixe f_j correspondant au fait d'utiliser le dépôt j. Il y a aussi un coût de transport c_{ij} pour amener le produit du dépôt j au client i. Le problème est de déterminer quels dépôts ouvrir et parmi ceux que l'on va ouvrir, quel dépôt fournit quel client. Ces choix sont faits de manière à minimiser le coût total.

Ce problème est souvent appelé uncapacitated facility location (UFL) dans la littérature anglaise sur le sujet.

On modélise le problème en prenant pour variables les $x_{ij} \in \{0, 1\}$ indiquant que le client i est servi par le dépôt j. On modélisera l'ouverture du dépôt j par une variable $y_j \in \{0, 1\}$.

a. Quelle relation existe-t-il entre les x_{ij} et les y_j ?
b. Donner une formulation du problème.
c. Proposer une relaxation lagrangienne.
d. On considère l'exemple avec $m = 6$ et $n = 5$ avec la matrice des coûts de transport

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 10 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } f = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 11 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a. Calculer la valeur de $\theta(u)$ pour $u = [5, 6, 3, 2, 6, 4]^t$.
b. Quelle valeur de x donne cette valeur ?
c. Comment modifier x pour obtenir une solution primale a peu près satisfaisante ?