Exercice 1. Les familles de densités suivantes sont-elles exponentielles ? Identifiables ?

(i) Loi de $Y = \mathbb{1}_{\{X>0\}}$, avec $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(ii) Loi de densité $f_{\theta,p}(x) = \dfrac{e^{\theta x - px^2}}{1 + e^{\theta - p}}$, où $x \in \{0; 1\}$, $p \in [0, 1]$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

(iii) Loi géométrique : $f_p(x) = p^{x-1}(1-p)$, où $p \in]0, 1[$ et $x \in \mathbb{N}^*$.

(iv) Loi Beta : $f_{a,b}(x) = B(a, b)^{-1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$, où $a, b > 0$ et $x \in]0, 1[$.

Exercice 2. Soit $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ une famille de densités vérifiant les hypothèses $(H1)$ à $(H4)$ du cours. On suppose que $\Theta =]a, b[$.

(a) Montrez que $\displaystyle\int \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(X) dv(x) = 0$.

(b) En déduire que pour tout $\theta \in]a, b[$, on a : $\mathbb{E}_\theta \left(\dfrac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(X) \right) = 0$.

(c) Montrez que pour tout $\theta \in]a, b[$,

$$\mathbb{E}_\theta \left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_\theta(X) \right) = \int -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f_\theta(X) dv + \int \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(x) \right)^2 f_\theta(x) dv(x).$$

(d) En déduire que :

$$\mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(X) \right)^2 \right] = \mathbb{E}_\theta \left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_\theta(X) \right).$$

Exercice 3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p où p est la réalisation d'une variable $U \rightsquigarrow \mathcal{U}[0, 1]$.

(a) Quelle est la densité du vecteur $(X_1, \ldots, X_n, U)$?

(b) Quelle est la loi de $U | X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$?

Exercice 4. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On cherche les maxima éventuels de la fonction qui à une loi de probabilité $\mathbb{P}$ discrète associe $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{x_i\})$.

(a) Soit $\widetilde{\mathbb{P}}$ un maximum. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $p_i = \widetilde{\mathbb{P}}(\{x_i\})$. Montrez que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

(b) Montrez que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} p_i \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n$.

(c) A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on égalité ?

(d) En déduire que l'unique solution du problème de départ est $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$.

Exercice 5. Soit $\psi : E \to \mathbb{R}$ une fonction, et $T : E \to \mathbb{R}^n$ une autre fonction notée $(T_1, \ldots, T_n)$. On équipe $\mathbb{R}^n$ de la norme infinie et on pose :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}} = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^k : \int_E |\psi(x)| e^{\langle \theta, T(x) \rangle} dv(x) < \infty \right\},$$

et :

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{H} & : & \mathcal{D}_{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \theta & \mapsto & \displaystyle\int_E \psi(x) e^{\langle \theta, T(x) \rangle} dv(x). \end{array}$$

On suppose que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(a) En développant l'exponentielle en série entière, montrez que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall |h| < \delta \ : \quad \left| \frac{e^{ht} - 1}{h} \right| \leq \frac{e^{\delta |t|}}{\delta}.$$

(b) Soit $\theta_0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ et $\delta > 0$ tel que $B(\theta_0, 3\delta) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on définit la fonction $\mathcal{J}$ par :

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{J} & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \psi(x) e^{\langle \theta_0 \pm \delta e_k, T(x) \rangle}. \end{array}$$

Vérifiez que $\displaystyle\int_E |\mathcal{J}(x)| dv(x) < \infty$.

(c) Montrez que :

$$\frac{\mathcal{H}(\theta_0 + h e_k) - \mathcal{H}(\theta_0)}{h} = \int_E \psi(x) e^{\langle \theta_0, T(x) \rangle} \frac{e^{h T_k(x)} - 1}{h} dv(x).$$

(d) Montrez que, pour $|h| < \delta$ et $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} |U_h(x)| := \left| \psi(x) e^{\langle \theta_0, T(x) \rangle} \frac{e^{h T_k(x)} - 1}{h} \right| \ &\leq \ \frac{1}{\delta} |\psi(x)| \left(e^{\langle \theta_0 + \delta e_k, T(x) \rangle} + e^{\langle \theta_0 - \delta e_k, T(x) \rangle} \right) \\ &\leq \ \frac{1}{\delta} |\mathcal{J}(x)|. \end{aligned}$$

(e) En déduire l'expression des dérivées partielles de $\mathcal{H}$.