Exercice 1 (Equation de vraisemblance)**.** On considère un modèle d'échantillonnage de taille n issu de la famille $(\mathcal{B}(p))_{p\in]0,1[}$: $f_p(x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x \in \{0;1\}$.

(1) Pour $x_1, \ldots, x_n$ fixés, écrire l'équation de vraisemblance.

(2) Montrez que l'équation admet exactement une solution ssi : $0 < \sum_{i=1}^{n} x_i < n$.

(3) On note $A_n = \{0 < \sum_{i=1}^{n} X_i < n\}$. Montrez que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n^C\right) = 0$. Que conclure ?

Répétez les questions précédentes pour les familles de lois suivantes (l'événement A_n de la question (3) pourra être différent) :

(i) $(\mathcal{P}(\lambda))_{\lambda>0}$: $f_\lambda(x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$.

(ii) $(\mathcal{E}(\lambda))_{\lambda>0}$: $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

(iii) Loi géométrique : $f_p(x) = p^{x-1}(1-p)$, $x \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

Exercice 2 (Information de Fisher)**.** Calculez l'information de Fisher élémentaire dans les modèles suivants :

(1) Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

(2) Loi exponentielle $(\mathcal{E}(\lambda))_{\lambda>0}$.

Exercice 3. Montrez que la famille des lois normales vérifie les conditions $(H1)$ à $(H6)$ du cours.

Exercice 4. Soit $a > 0$ et (X, Y) un vecteur aléatoire tel que :

(i) X est presque sûrement positif.

(ii) Pour tout $x \geq 0$, $\mathcal{L}(Y|X = x) = \mathcal{P}(ax)$.

On cherche à estimer a.

(1) Ecrire la densité de $Y|X = x$.

(2) Etant donnés $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, posez l'équation de quasi-vraisemblance.

(3) A quelle condition cette équation admet-elle exactement une solution ?

(4) Peut-on considérer que cette condition est raisonnable ?