Exercice 1. On reprend l'exercice 4 de la feuille de TD précédente. Soit $a > 0$ et (X, Y) un vecteur aléatoire tel que :

(i) X est presque sûrement positif et $X \in L^2$.

(ii) Pour tout $x \geq 0$, $\mathcal{L}(Y|X = x) = \mathcal{P}(ax)$.

On cherche à estimer a.

(1) Ecrire la densité de $Y|X = x$.

(2) Etant donnés $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, posez l'équation de quasi-vraisemblance.

(3) A quelle condition cette équation admet-elle exactement une solution ?

(4) Peut-on considérer que cette condition est raisonnable ?

(5) Calculez l'information de Fisher élémentaire (donnez-en une expression plus commode que celle du cours).

(6) En admettant que les hypothèses $(H1')$ à $(H6')$ du cours sont vérifiées, quelle est la loi limite de $\sqrt{n}(\hat{a} - a)$?

(7) Proposez un esimateur de la variance asymptotique et déduisez-en une fonction asymptotiquement pivotale pour a.

(8) Vers quoi converge le couple $(\overline{X}, \overline{Y})$? Y a-t-il une loi limite pour $\sqrt{n}\left((\overline{X}, \overline{Y}) - (?, ?)\right)$?

(9) En utilisant la δ-méthode, retrouvez la convergence en loi de $\sqrt{n}(\hat{a} - a)$.

Exercice 2 (Lois multinomiales)**.** Soit X une variable aléatoire prenant trois valeurs m_1, m_2 et m_3. Pour $i \in [\![1, 3]\!]$, on note $p_i = \mathbb{P}(X = m_i)$. Remarquons que, comme $p_3 = 1 - p_1 - p_2$, il n'est pas nécessaire d'estimer p_3. Nous considérons la famille de ces lois indexées par $p_1 \in]0, 1[$, $p_2 \in]0, 1[$ et $p_1 + p_2 < 1$.

(1) Etant donné un échantillon $x_1, \ldots, x_n$, écrivez la vraisemblance.

(2) (Facultatif) Quelle est (sont) la (les) solution(s) éventuelles de l'équation de vraisemblance ? On notera $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ la solution lorsqu'elle est unique.

(3) Vérifiez que la modèle étudié est régulier puis donnez une fonction asymptotiquement pivotale pour (p_1, p_2).

(4) Appliquez le théorème central limite au vecteur $\sqrt{n}(\hat{p}_1 - p_1, \hat{p}_2 - p_2)$ et donnez un estimateur de la variance asymptotique. Déduisez-en une fonction asymptotiquement pivotale pour (p_1, p_2).

(5) Application numérique : $n = 100$, $\hat{p}_1 = 0,2$, $\hat{p}_2 = 0,3$.

  (a) Donnez un intervalle de confiance asymptotique pour p_1.

  (b) Donnez un intervalle de confiance asymptotique pour p_2.

  (c) Donnez une région de confiance asymptotique pour (p_1, p_2).

  Indication :

$$\begin{pmatrix} 0,16 & -0,06 \\ -0,06 & 0,21 \end{pmatrix}^{-1/2} \simeq \begin{pmatrix} 2,61 & 0,41 \\ 0,41 & 2,27 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Dans les modèles d'échantillonage de taille n suivants, trouvez une fonction pivotale, non asymptotiquement pivotale, faisant intervenir toutes les observations.

(1) Lois uniformes sur $[0, \theta]$.

(2) Lois exponentielles : $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

(3) (Révisions) Lois normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.