Exercice 1 (Calibrages). Pour $\alpha = 5\%$, 2% et 1%, trouvez c et u par calibrage de :

1) $T(X) = X$ sous la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2) $T(X) = \sum_{i=1}^{10} X_i$ sous la loi $\mathcal{B}(0.3)^{\otimes 10}$.

3) $T(X) = \sum_{i=1}^{5} X_i^2$ sous la loi $\mathcal{N}(0,4)^{\otimes 5}$.

4) $T(X) = \sum_{i=1}^{5} X_i$ sous la loi $\mathcal{P}(2)^{\otimes 5}$.

Exercice 2 (Un test de Neyman-Pearson). On veut tester $p = 0.2$ contre $p = 0.3$ pour un échantillon de taille 20 issu de la loi $\mathcal{B}(p)$.

1) Ecrivez la statistique de test de Neyman-Pearson pour un niveau α donné mais ne calculez ni c ni u.
2) Montrez que le test peut s'écrire sous la forme :

$$d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum x_i < c', \\ u & \text{si } \sum x_i = c', \\ 1 & \text{si } \sum x_i > c'. \end{cases}$$

3) Trouvez c' et u par calibrage de $T(X) = \sum X_i$ sous la loi $\mathcal{B}(0.2)^{\otimes 20}$ pour $\alpha = 5\%$.

Exercice 3 (Test de Lehman). On considère le modèle des lois de Bernouilli$^{\otimes n}$.

1) Ecrivez la vraisemblance du modèle.
2) Montrez que le modèle est à RVC.
3) On veut tester $p \leq 0.3$ contre $p > 0.3$. Donnez l'expression du test de Lehmann pour $\alpha = 4\%$.
4) Montrez que $\lim_{p \to 0.3^+} \beta(p) = 1 - \alpha_0$.

Exercice 4 (Région critique et biais). On veut tester $\mu = 0$ contre $\mu \neq 0$ dans le modèle $\mathcal{N}(\mu, 1)$. On sait que sous H_0, la statistique $\sqrt{n} \cdot \overline{X}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, en posant :

$$d_1(x) = 1 \iff \left| \sqrt{n} \frac{\sum x_i}{n} \right| > z_{\alpha/2},$$

on obtient bien un test de niveau α. Même si d_1 semble construit de façon naturelle, on pourrait décider de construire d_2 tel que :

$$d_2(x) = 1 \iff \left| \sqrt{n} \frac{\sum x_i}{n} \right| < \varepsilon_\alpha.$$

1) Calculez ε_α de sorte que d_2 soit de niveau $\alpha = 1\%$. On utilisera l'approximation :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \simeq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}.$$

2) Soit $\mu_1 > 0$. Donnez l'expression de $\beta(\mu_1)$ en fonction de ε_α et de n.
3) Montrez que $\beta(\mu_1) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$.
4) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. Montrez que le test est biaisé. On montrera que :

$$\forall \mu_1 > 0,\ \mathbb{P}_{\mu_1}(d_2(X) = 1) < \mathbb{P}_0(d_2(X) = 1).$$