Exercice 1. On reprend l'exercice 2 du TD 3 afin de résoudre la question (5) laissée en suspens. On rappelle qu'on avait noté :

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i=m_1\}} \ , \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i=m_2\}} \ , \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{p}_1(1-\hat{p}_1) & -\hat{p}_1\hat{p}_2 \\ -\hat{p}_1\hat{p}_2 & \hat{p}_2(1-\hat{p}_2) \end{pmatrix}.$$

On avait de plus établi les convergences en loi suivantes :

$$\sqrt{n}\ \hat{\Sigma}^{-1/2} \begin{pmatrix} \hat{p}_1 - p_1 \\ \hat{p}_2 - p_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I_2) \ , \quad \text{et} \quad \sqrt{n}\ \frac{\hat{p}_i - p_i}{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Application numérique : $n = 100$, $\hat{p}_1 = 0,2$, $\hat{p}_2 = 0,3$.

(a) Donnez un intervalle de confiance asymptotique pour p_1.

(b) Donnez un intervalle de confiance asymptotique pour p_2.

(c) Donnez une région de confiance asymptotique pour (p_1, p_2).

Indication :

$$\begin{pmatrix} 0,16 & -0,06 \\ -0,06 & 0,21 \end{pmatrix}^{-1/2} \simeq \begin{pmatrix} 2,61 & 0,41 \\ 0,41 & 2,27 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Un calcul de puissance, calibrage asymptotique)**.** On cherche à tester $H_0 : \theta \leq 3$ contre $H_1 : \theta > 3$ dans le modèle d'échantillonnage de taille n issu de la famille des lois exponentielles. On rappelle que la densité d'une loi $\Gamma(\theta, n)$ est donnée par :

$$f_{\theta,n}(x) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

1) Montrez que le modèle est à RVC.
2) Sans chercher à calculer les constantes de calibrage, donnez la forme du test de Lehmann.
3) Pour α_0 fixé, trouvez une valeur approchée de la constante de calibrage c, en supposant que n est assez grand pour approximer la loi de $\sum X_i$ (on utilisera le théorème central limite pour approximer cette loi). Doit-on calculer u ?
4) Soit $K > 0$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrez que la fonction : $\theta \mapsto \mathbb{P}(\Gamma(\theta, n) \geq K)$ est décroissante (on pourra faire le changement de variable $u = \theta x$ dans l'intégrale).
5) En déduire que, pour n et α_0 fixés, la fonction de risque β du test de Lehmann de niveau α_0 est décroissante en θ.
6) Soient $\rho > 0$ et $(\alpha_0, \alpha_0') \in]0,1[^2$ fixés. Trouvez le plus petit entier n_0 tel que $\beta(3+\rho) \leq \alpha_0'$ en utilisant une approximation asymptotique de la loi de $\sum X_i$ donnée par le TCL.
7) Application : pour $\rho = 0.1$, $\alpha_0 = 1\%$ et $\alpha_0' = 5\%$, calculez n_0.
   Soit maintenant $n \geq n_0$.
   a) Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que $d_L(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Que peut-on conclure, et avec quel risque ?
   b) Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que $d_L(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Que peut-on conclure, et avec quel risque ?