S'exprimer et raisonner en mathématiques

1

1. Démontrer que l'assertion suivante est une tautologie :

$$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

   En déduire la négation de l'assertion suivante : «La fonction f est injective ou surjective».

2. Démontrer que l'assertion suivante est une tautologie :

$$((\neg P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Longrightarrow P.$$

   À quel raisonnement correspond ce résultat ?

2 Soit n un entier naturel. Démontrer, par disjonction des cas, que $n^3 - n$ est divisible par 3.
On discutera en distinguant les restes de la division euclidienne de n par 3.

3 Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

4 Soit a un nombre réel vérifiant :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |a| < \varepsilon.$$

Montrer que $a = 0$.

5 Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que, si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

6 On cherche à déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

1. On suppose qu'une telle fonction f existe. Prouver que $f(0) = 1$.
2. En déduire l'expression de $f(x)$.
3. Conclure.

Trigonométrie et compléments de calcul algébrique

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : 4x + 2 = \sqrt{3 - 2x} \qquad (E_2) : \sqrt{m + x} - \sqrt{1 + x} = 1 \text{ où } m \in \mathbb{R}$$

8 Démontrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + x)^n \geqslant 1 + nx$
2. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$

9 Montrer que, pour tous réels x et y :

$$(i) \quad \sqrt{|x - y|} \leqslant \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \qquad (ii) \quad |x| + |y| \leqslant |x + y| + |x - y|$$

10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $\frac{x}{x-4} \geqslant \frac{1}{x+5}$
2. $x^3 + 5x \leqslant 6x^2$
3. $|5 - x| \leqslant 2$
4. $\left|1 - 2x^2\right| \geqslant 3$
5. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant |x - 2|$
6. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant x - 2$
7. $\sqrt{1 - x^2} \leqslant m - x$ où m est un paramètre réel.

11 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

En déduire pour $n \geqslant 2$, la somme : $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)$

12 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Démontrer que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1},$$

   et que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}.$$

   En déduire les sommes

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$$

2. Calculer si possible de plusieurs façons la somme

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} \quad (\text{où } n \geqslant p \geqslant 0).$$

Suites réelles

13

1. Soit a et b deux constantes réelles. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n.$$

   On suppose que l'équation d'inconnue x, $x^2 = ax + b$ admet au moins une solution c. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+1} - c\,u_n$ est géométrique de raison $a - c$.

2. On appelle suite de Fibonacci la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0\,; \quad F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = x + 1$.
   On notera Φ la solution positive et φ la solution négative.

   (b) En utilisant la première question,, exprimer F_n en fonction de n, de Φ et de φ.

   (c) Déterminer la limite des quotients $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

14 Étudier la convergence de la suite V de terme général

$$v_n = \frac{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}{n!}$$

en utilisant le théorème des gendarmes.

15 On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
2. Donner un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

16 On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Montrer que u et v convergent vers la même limite ℓ.
2. En déduire un encadrement de ℓ d'amplitude 10^{-5}.

17 Classer par ordre croissant pour la relation « est négligeable devant » :

$$(2n)!, \quad n^n, \quad e^{2n}, \quad n!, \quad n\ln(n), \quad (\sqrt{n})^n$$

18 On considère la suite définie par son premier terme u_0 strictement positif et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante. En déduire qu'elle est convergente et préciser la valeur de sa limite.
2. (a) Montrer, par récurrence, que $\forall \in \mathbb{N}^\star, \quad 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
   (b) Montrer que pour tout entier k on a : $\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = 1 + u_k$.
   (c) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k)$
   (d) Quelle est la limite lorsque n tend vers l'infini de $\frac{\ln(n)}{n}$?
   (e) En déduire un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$.

19 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Que pensez-vous des assertions suivantes :

- Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ.
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, il en est de même pour (u_n).
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même pour (u_n).

20 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{2n^2}.$$

1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et ont la même limite. On pose $\ell = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.
2. Déterminer un entier p tel que u_p soit une approximation de ℓ à 0,01 près.
3. Reproduire et compléter le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice :

n	valeur approchée de u_n à 0,001 près par défaut	valeur approchée de v_n à 0,001 près par excès
5		
10		
15		

4. Déduire de ce tableau une valeur décimale approchée de ℓ aussi précise que possible.On indiquera la précision de cette approximation.

Ensembles et applications

21 On considère les quatre parties de $\mathbb{N}$ suivantes :

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 3k\} \qquad B = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 12k\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 15k\} \qquad D = \{n \in \mathbb{N},\ n \leqslant 100\}$$

1. Définir chaque ensemble précédent à l'aide d'une phrase en français.
2. Donner la liste des éléments de $B \cap D$.
3. Déterminer $A \cup B \cup C$.
4. Déterminer $A \cap B \cap C$ et donner la liste des éléments de $D \cap B \cap C$

22 Un sondage effectué auprès de 150 personnes a donné les résultats suivants :

- À la question «consommez-vous régulièrement de l'alcool ?», 50 personnes répondent oui.
- À la question «êtes-vous fumeur ?», 80 personnes répondent oui.
- À la question «êtes-vous un fumeur qui consomme régulièrement de l'alcool ?», 35 personnes répondent oui.

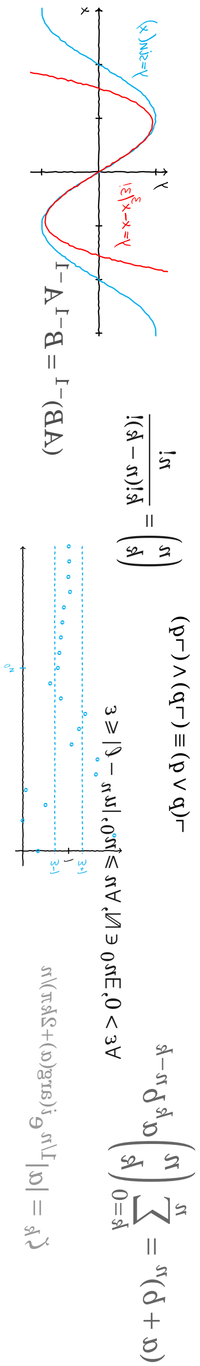
Combien de personnes ne sont pas fumeurs et ne consomment pas régulièrement de l'alcool ?

23 1. Donner $f(\mathbb{R})$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par $f(t) = \mathrm{e}^{it}$.

2. On note $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C} / \theta \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit l'application

$$g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\star & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + \frac{1}{z} \end{array}$$

Déterminer $g(\mathbb{U})$.



24 Soit n et p deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. On pose $E = \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ et $F = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

1. Quel est le nombre de sous-ensembles de E ?
2. Quel est le nombre d'applications de E dans F ?
3. Quel est le nombre de bijections de E sur E ?
4. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de E dans F ?

25 Soit $f : E \to F$ une application. Soit A et B deux parties de E. Démontrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

26 *QCM.* Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, $A \cup (A \cap B) = \ldots$

   (a) A (b) B (c) $\cap B$ (d) $A \cup B$

2. On pose $I = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 4\}$. Alors $I \cap \mathbb{Z} = \ldots$

   (a) $\{-1; 1\}$ (b) $\{0; 1; 2\}$ (c) $\{0; -1; 1\}$ (d) $]-2; 2[$

3. Le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a, b\}))$ est égal à ...

   (a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16

4. On lance 3 fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note les triplets ainsi obtenus. Combien y a-t-il de triplets différents ?

   (a) $3!$ (b) 3^6 (c) 6^3 (d) A_6^3

5. Quel est le coefficient de x^{87} dans l'écriture développée du polynôme $(1-x)^{100}$?

   (a) 87^{100} (b) $\binom{100}{87}$ (c) -87^{100} (d) $-\binom{100}{13}$

6. Soit E un ensemble fini de cardinal n où $n \in \mathbb{N}^\star$. A et B sont deux parties de E, de cardinaux respectifs p et q tels que $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$. On suppose que $A \subset B$. Quel est le nombre de parties X de E telles que $A \subset X \subset B$?

   (a) 2^q (b) $2^q - 2^p$ (c) 2^{q-p} (d) $\binom{q}{p}$

Limites et continuité

27 Étudier la limite éventuelle lorsque $x \to 1$ de :

$$\frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}.$$

28 1. On se propose de trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

On suppose qu'une telle fonction f existe.

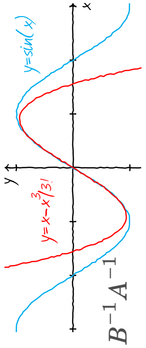
(a) Calculer $f(0)$ et vérifier que f est une fonction paire.

(b) Soit x_0 un réel fixé. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n x_0) = n^2 f(x_0).$$

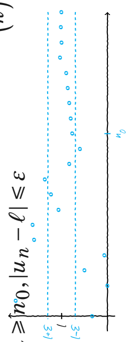
En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(p x_0) = p^2 f(x_0).$$



$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$



$\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$

$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,|u_n-\ell|\leq\varepsilon$

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$

$\zeta_k=|a|^{1/n}e^{i(\arg(a)+2k\pi)/n}$

(c) Montrer que pour tout rationnel $r\in\mathbb{Q}$, $f(r)=r^2f(1)$.

(d) En déduire que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=x^2f(1).$$

(e) Conclure.

2. En utilisant la question précédente, trouver toutes les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad g(x+y)\cdot g(x-y)=g(x)^2g(y)^2.$$

29 Soit $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

30 L'équation $x^5=5x-1$ admet-elle des solutions ? Si oui, combien ?

Résolution d'équations à variable complexe

31 1. (a) Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(b) Mettre $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme exponentielle.

(c) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

32 On désigne par θ un nombre réel tel que $-\pi<\theta<\pi$. On pose $u=1+e^{i\theta}$

1. Écrire $1+e^{i\theta}$ sous forme exponentielle.
2. Montrer que u est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$z^2-(2+2\cos\theta)z+(2+2\cos\theta)=0.$$

En déduire la seconde solution de cette équation.

33 *médian 2011.* 1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4=1$.

(b) Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. (a) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a=-2,\quad b=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i\quad\text{et}\quad c=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i.$$

(b) Prouver que les points O,A,B et C sont situés sur un cercle que l'on déterminera.

3. (a) Placer le point D d'affixe $d=-\frac{1}{2}$.

(b) Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z'=\frac{a-c}{d-c}.$$

(c) En déduire le rapport $\frac{CA}{CD}$.

(d) Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

Dérivabilité

34 Étudier la dérivabilité des fonctions f,g et h définies par :

$$f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}\quad\text{si } x\neq0\quad\text{et}\quad f(0)=0,$$

$$g(x)=\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\quad\text{si } x\neq0\quad\text{et}\quad g(0)=0,$$

$$h(x)=\frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}\quad\text{si } x\neq1\quad\text{et}\quad h(1)=1.$$

35 Calculer la dérivée de la fonction f et dresser le tableau de variations de f (en ayant déterminé les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f).

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$
2. $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$
3. $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
4. $f : x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$
5. $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$
6. $f : x \mapsto \sqrt{x}\, e^{-x}$
7. $f : x \mapsto x^x$

36 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$ à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0,1]$.
2. En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$

37 Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose que $f(I) \subset I$ et qu'il existe un réel $k \in [0,1[$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant k.$$

On considère une suite (u_n) définie par

$$u_0 \in I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur le segment I. On la notera α.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha| \leqslant k|u_n-\alpha|$
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n-\alpha| \leqslant k^n|u_0-\alpha|$
4. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
5. **Application** : on définit la fonction f par $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}$.
   (a) Donner l'ensemble de définition de f et dresser son tableau de variation.
   (b) On pose $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Prouver qu'il existe un réel $k \in [0,1[$ tel que pour tout $x \in I, |f'(x)| \leqslant k$.
   (c) Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1/2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Polynômes

38 Obtenir une relation entre coefficients binomiaux à l'aide de l'égalité :

$$(1+X)^p(1+X)^q = (1+X)^{p+q}.$$

39 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X+1) = P(X).$$

On pourra s'intéresser à l'ensemble des racines de P.

40 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

On raisonnera par analyse/synthèse. Si un tel polynôme P existe, on donnera son degré et on calculera $P(1)$ et $P(i^2)$.

41 Déterminer tous les polynômes P de $C[X]$ vérifiant, pour tous nombres complexes z_1 et z_2,

1. $P(z_1+z_2) = P(z_1)P(z_2)$ (étudier les racines)
2. $P(z_1z_2) = P(z_1)+P(z_2)$ (étudier le degré)
3. $P(z_1z_2) = P(z_1)P(z_2)$ (étudier les racines)
4. $P(z_1+z_2) = P(z_1)+P(z_2)$ (dériver)

42 *médian 2010* Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par :

$$P = (1+X)^n - X^n.$$

1. Quel est le degré de P ? Donner son coefficient dominant.
2. Démontrer que si z est une racine de P alors $\Re e(z) = -\frac{1}{2}$
3. (a) Démontrer que, pour tout réel x,

$$e^{ix} - 1 = 2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}.$$

   (b) Déterminer les racines de P. On les exprimera en fonction des racines n-ièmes de l'unité.

   (c) Écrire chaque racine de P sous forme exponentielle. En déduire le module et un argument de chacune de ces racines.
4. On note $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ les racines du polynôme P. Calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{z_k}.$$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant suivant les valeurs de l'entier $n \geqslant 2$, l'équation d'inconnue x :

$$(1+x)^n = x^n.$$

43 *final 2012.* Pour tout entier naturel n non nul, on définit le polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ par

$$P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

1. Calculer son polynôme dérivé $P_n'(X)$.
2. Démontrer que 1 est la seule racine multiple de $P_n(X)$.
3. On considère la fonction polynômiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^\star.$$

   (a) En identifiant $f(x)$ comme étant la somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique, calculer de deux façons différentes $f'(x)$ pour $x \neq 1$.

   (b) En déduire le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $(X-1)^2$.
4. On note $Q(X)$ le quotient de la division euclidienne de $P_4(X)$ par $(X-1)^2$ et on désigne par a, b et c les racines complexes du polynôme $Q(X)$.

   (a) Factoriser $Q(X)$ en fonction de a, b et c dans $\mathbb{C}[X]$.

   (b) Calculer la somme

$$\sigma = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}.$$