utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

Examen final - MT1

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 1 : la suite de Sylvester (7 points)

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :

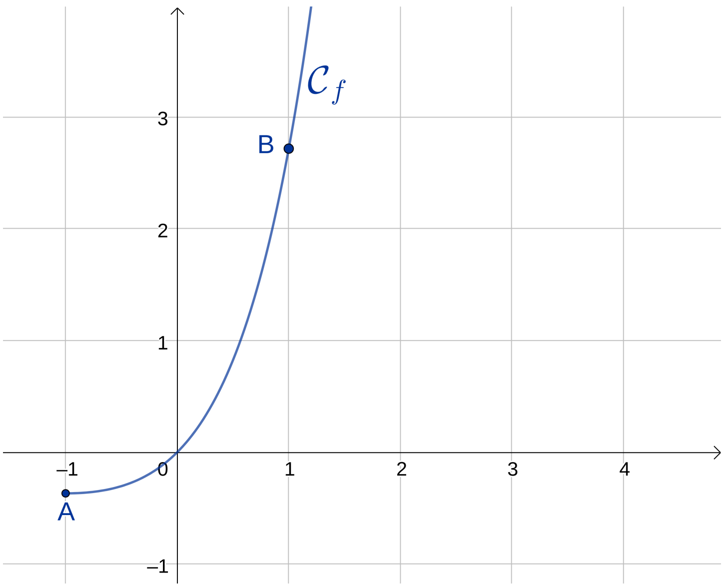
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
   (b) Démontrer que si $(u_n)_n$ est majorée, alors elle admet pour limite $\ell = 1$.
   (c) En déduire que $u_n \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} +\infty$.
2. On définit maintenant la suite $(S_n)_n$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$
   (a) Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1-u_{k+1}} - \dfrac{1}{1-u_k} = \dfrac{1}{u_k}$
   (b) À l'aide de la question précédente, simplifier l'expression de S_n.
   (c) En déduire que $(S_n)_n$ converge et donner sa limite.

Exercice 2 : étude d'une fonction (7 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-1\,, +\infty[$ par : $\forall x \in I,\ f(x) = x\,\mathrm{e}^x$.

1. Étudier le sens de variation de f sur I et indiquer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Prouver que la fonction f est bijective de I sur un intervalle J que l'on précisera.
   On note désormais g la bijection réciproque de f, autrement dit : $g = f^{-1}$
   (b) Simplifier pour tout réel t appartenant à J, $g(t)\,\mathrm{e}^{g(t)}$.
   (c) Donner sans justification le sens de variation de g sur J, ainsi que les valeurs de $g(0)$ et de $g(\mathrm{e})$.
3. (a) Justifier que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]-\mathrm{e}^{-1}\,, +\infty[$ et exprimer $g'(t)$ en fonction de $g(t)$, pour tout réel $t > -\mathrm{e}^{-1}$.
   (b) Que vaut $g'(0)$?
4. (a) Montrer que, pour tout réel $t > 0$, $\ln(g(t)) + g(t) = \ln t$.
   (b) Donner la limite de g en $+\infty$ et en déduire $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(g(t))}{g(t)}$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes, un équivalent de $g(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
5. Tracer sur la figue ci-dessous, la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de la fonction g. On fera apparaître les tangentes aux points d'abscisse 0 et $-\mathrm{e}^{-1}$.

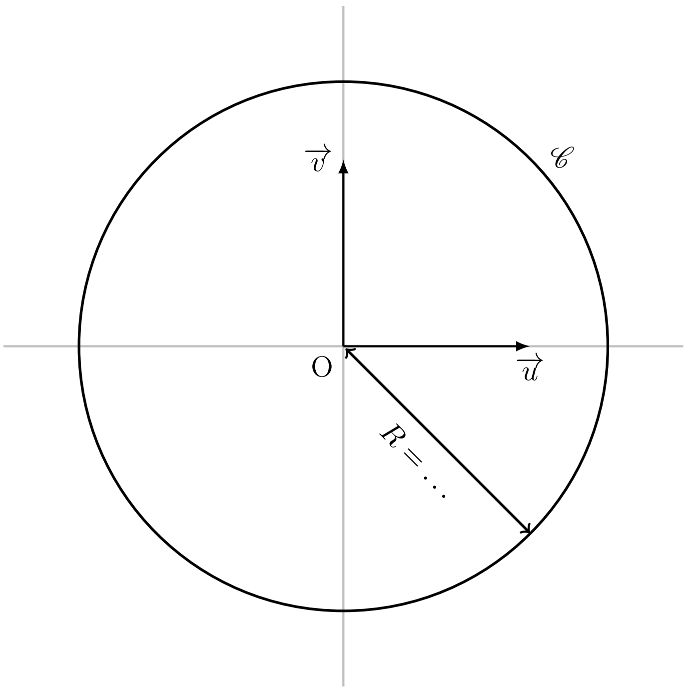


Exercice 3 : polynômes (6 points)

1. (a) Résoudre l'équation (E) ci-dessous d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$(E) \ : \ z^6 = 8.$$

   (b) Dans le plan ci-dessous, représenter les solutions de (E) sur le cercle $\mathscr{C}$ dont on indiquera la valeur du rayon R.



2. On pose $P = X^6 - 8$. Déduire de la question 1 la factorisation du polynôme P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

3. (a) Rappeler quels sont les polynômes qui sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

   (b) En déduire la factorisation du polynôme P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1 : Correction (7 points)

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geqslant 0.$$
La suite est donc croissante.

   (b) Supposons $(u_n)_n$ majorée. Comme elle est aussi croissante, on en déduit qu'elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Or :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$
On en déduit que :
$$\ell = \ell^2 - \ell + 1,$$
puis que $\ell = 1$.

   (c) La suite étant croissante et de premier terme $u_0 > 1$, on en déduit qu'elle ne peut pas être majorée (sinon elle convergerait vers 1 et ne pourrait donc pas être croissante). Ainsi, $(u_n)_n$ est croissante et non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$.

2. (a) Soit k un entier. En réduisant au même dénominateur et en utilisant la relation de récurrence qui définit la suite, on obtient :
$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-u_{k+1}} - \frac{1}{1-u_k} &= \frac{(1-u_k)-(1-u_{k+1})}{(1-u_k)(1-u_{k+1})} \\
&= \frac{u_{k+1}-u_k}{(1-u_k)\left(u_k-u_k^2\right)} \\
&= \frac{(u_k-1)^2}{(1-u_k)\,u_k\,(1-u_k)} \\
&= \frac{1}{u_k}
\end{aligned}$$

   (b) Grâce à la question précédente, on remarque que S_n est une somme télescopique. En effet,
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1-u_{k+1}} - \frac{1}{1-u_k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1-u_{k+1}} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1-u_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{1-u_k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1-u_k} \\
&= \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{1-u_0}
\end{aligned}$$

   (c) Sachant que $u_n \to +\infty$, on peut passer à la limite dans l'expression précédente. On obtient :
$$S_n \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} -\frac{1}{1-2} = 1.$$

Exercice 2 : Correction (7 points)

$\forall\, x \in I,\ f(x) = x\,\mathrm{e}^x$

1. • f est dérivable sur I et $\forall\, x \in I,\ f'(x) = \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (1+x)\,\mathrm{e}^x$
   Or $f'(-1) = 0$ et $\forall\, x \in I \setminus \{-1\}\,,\ f'(x) > 0$.
   Donc f est **strictement** croissante sur $\mathbb{R}$.
   • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

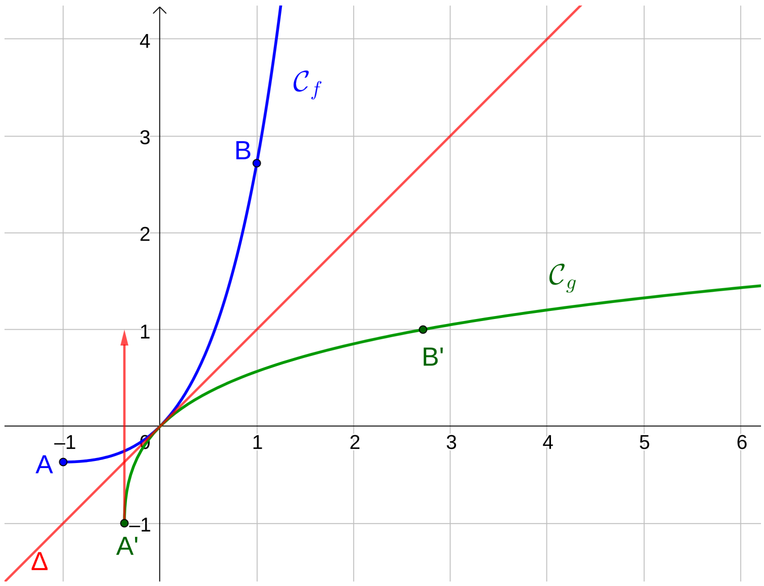
2. (a) La fonction f est **continue** et **strictement** croissante sur l'**intervalle** I.
   Donc, d'après le théorème de la bijection, f est bijective de I sur l' intervalle image :
   $$J = f(I) = \left[f(-1)\,,\, \lim_{+\infty} f \right[= [-\mathrm{e}^{-1}\,,\, +\infty[$$
   (b) Soit $t \in J$. Puisque $f \circ g = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_J$, nous avons
   $\boxed{g(t)\,\mathrm{e}^{g(t)} = (f \circ g)(t) = t}$.
   (c) La fonction g est strictement croissante sur J. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = \mathrm{e}$, on en déduit que $g(0) = 0$ et de $g(\mathrm{e}) = 1$.

3. (a) • Soit $t \in]-\mathrm{e}^{-1}\,,\, +\infty[$. Alors $\exists\, !x \in]-1\,,\, +\infty[\ ;\ t = f(x)$
   De plus, f est dérivable en x et $f'(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^x \neq 0$. Donc la bijection réciproque de f est dérivable en t.
   Ainsi g est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-\mathrm{e}^{-1}\,,\, +\infty[$.

   • Soit $t > -\mathrm{e}^{-1}$. Alors $g'(t) = \left(f^{-1}\right)'(t) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(t)\big)} = \dfrac{1}{f'\big(g(t)\big)}$
   $$\text{Donc } \boxed{g'(t) = \frac{1}{\big(1+g(t)\big)\,\mathrm{e}^{g(t)}}}$$
   (b) $g'(0) = \dfrac{1}{\big(1+g(0)\big)\,\mathrm{e}^{g(0)}} = 1$

4. (a) Soit $t > 0$. On a vu en 2.(b) que $g(t)\,\mathrm{e}^{g(t)} = t$.
   Comme $t > 0 \Rightarrow g(t) > g(0) \Rightarrow g(t) > 0$,
   on obtient, par passage au logarithme népérien :
   $$\ln\left(g(t)\,\mathrm{e}^{g(t)}\right) = \ln t \quad \text{c'est-à-dire} \quad \ln(g(t)) + \underbrace{\ln\left(\mathrm{e}^{g(t)}\right)}_{g(t)} = \ln t$$
   (b) D'après 2.(a), $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$. On sait de plus que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$.
   D'où, par composition $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln(g(t))}{g(t)} = 0}$
   (c) Pour tout réel $t > 0$, $\ln(g(t)) + g(t) = \ln t$ et $g(t) > 0$
   d'où $\dfrac{\ln(g(t))}{g(t)} + 1 = \dfrac{\ln t}{g(t)}$. Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{g(t)} = 1$
   $$\text{ce qui revient à dire que } \boxed{g(t) \underset{(t \to +\infty)}{\sim} \ln t}$$

5. Courbe représentative de g :



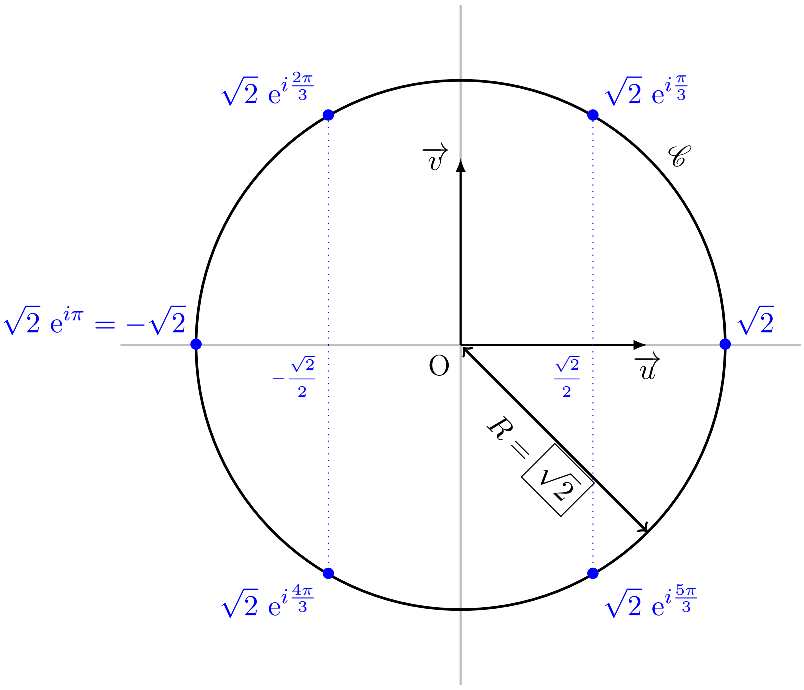
Exercice 3 : Correction (6 points)

1. (a) Considérons l'équation $(E)\ :\ z^6 = 8$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
On sait que 8 s'écrit sous forme exponentielle $8e^{i\times 0}$, d'où $\arg(8) \equiv 0\ [2\pi]$. Par conséquent,

$$\boxed{(E)\ :\ z^6 = 8} \iff \begin{cases} \left|z^6\right| = |8| \\ \arg\left(z^6\right) \equiv \arg(8)\ \ [2\pi] \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} |z|^6 = 8 \\ 6\arg(z) \equiv 0\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} |z| = 8^{\frac{1}{6}} \quad \text{car } |z| \in \mathbb{R}^+ \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 6\arg(z) = 0 + 2k\pi \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} |z| = \left(2^3\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \arg(z) = \dfrac{2k\pi}{6} = \dfrac{k\pi}{3} \end{cases}$$
$$\boxed{\iff \exists k \in [\![0,5]\!],\ z = \sqrt{2}\ e^{i\frac{k\pi}{3}}}.$$

$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont donc : } \sqrt{2},\ \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{3}},\ \sqrt{2}\ e^{i\frac{2\pi}{3}},\ \sqrt{2}\ e^{i\pi} = -\sqrt{2},\ \sqrt{2}\ e^{i\frac{4\pi}{3}} \text{ et } \sqrt{2}\ e^{i\frac{5\pi}{3}}}.$

(b) Représentons dans le plan ci-dessous les six solutions de (E) :



2. On pose $P = X^6 - 8$. D'après la question 1 et puisque le coefficient dominant de P est égal à 1, on peut écrire la factorisation du polynôme P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X - \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)\left(X - \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\left(X - \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}}\right).$$

3. (a) Les polynômes à coefficients réels qui sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont ceux $\boxed{\text{de degré 1}}$ et ceux $\boxed{\text{de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif}}$.

   (b) On remarque que :

$$\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{(6-2)\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i2\pi}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{(6-1)\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i2\pi}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

   En remplaçant dans la factorisation de la question 2, on en déduit :

$$\begin{aligned}
P &= \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X - \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)\left(X - \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X - \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\\
&= \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)\underline{\left(X - \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}\ \underline{\left(X - \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X - \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)}\\
&= \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)\underline{\left(X^2 - \sqrt{2}\ \left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\right)X + \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\ \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}\times\\
&\quad \underline{\left(X^2 - \sqrt{2}\ \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)X + \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\ \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)}\\
&= \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)\left(X^2 - \sqrt{2}\ \left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)X + 2\right)\left(X^2 - \sqrt{2}\ \left(2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)X + 2\right)\\
&= \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)\left(X^2 - \sqrt{2}\ X + 2\right)\left(X^2 - \sqrt{2}\ (-1)X + 2\right).
\end{aligned}$$

   La factorisation du polynôme P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est donc :

$$\boxed{P = \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)\left(X^2 - \sqrt{2}\ X + 2\right)\left(X^2 + \sqrt{2}\ X + 2\right)}.$$

Exercice 1 : Barème (7 points)

1. (a)
   - $0,5$ pour introduire la variable n
   - $0,5$ pour trouver $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

   (b)
   - $0,5$ pour démontrer que la suite converge.
   - 1 pour le calcul de la limite dont $0,5$ pour la rédaction.

   (c)
   - $0,5$ pour démontrer que la suite n'est pas majorée.
   - $0,5$ pour énoncer clairement que croissante et non majorée implique qu'elle diverge vers $+\infty$.

2. (a)
   - $1,5$ point, 0 pour toute tentative de bluff.

   (b)
   - $0,5$ pour la linéarité de la somme.
   - 1 point pour le télescopage.

   (c)
   - $0,5$ point pour le calcul de la limite.

Exercice 2 : Barème (7 points)

1. **1 point** dont :
   - *0,25 pt* pour $f'(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^x$
   - *0,25 pt* pour justifier que $f'(x) > 0$
   - *0,25 pt* pour dire que «f est croissante sur I»
   - *0,25 pt* pour donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. (a) **0,5 point** dont :
   - *0,25 pt* pour citer au moins 2 des hypothèses du théorème de la bijection
   - *0,25 pt* pour dire que $J = f(I) = [-\mathrm{e}^{-1}\,,\, +\infty[$

   (b) **0,5 point** pour $g(t)\,\mathrm{e}^{g(t)} = (f \circ g)(t) = t$

   (c) **0,75 point** dont :
   - *0,25 pt* pour «g est croissante sur J»
   - *0,25 pt* pour $g(0) = 0$
   - *0,25 pt* pour $g(\mathrm{e}) = 1$

3. (a) **1 point** dont :
   - *0,5 pt* pour justifier que g est dérivable sur $]-\mathrm{e}^{-1}\,,\, +\infty[$
   - *0,5 pt* pour obtenir $g'(t) = \dfrac{1}{(1+g(t))\,\mathrm{e}^{g(t)}}$

   (b) **0,25 point** pour $g'(0) = 1$

4. (a) **0,5 point** dont :
   - *0,25 pt* pour rappeler que $g(t)\,\mathrm{e}^{g(t)} = t$
   - *0,25 pt* pour passer au logarithme népérien dans cette égalité

   (b) **0,5 point** dont :
   - *0,25 pt* pour donner $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$
   - *0,25 pt* pour écrire $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(g(t))}{g(t)} = 0$

   (c) **1 point** dont :
   - *0,25 pt* pour $\dfrac{\ln(g(t))}{g(t)} + 1 = \dfrac{\ln t}{g(t)}$
   - *0,25 pt* pour $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{g(t)} = 1$
   - *0,5 pt* pour $g(t) \underset{(t\to+\infty)}{\sim} \ln t$

5. **1 point** dont :

- *0,25 pt* pour tracer la droite d'équation $y = x$
- *0,25 pt* pour placer le point $A'(-\mathrm{e}^{-1}, -1)$
- *0,25 pt* pour la tangente verticale en A'
- *0,25 pt* pour un tracé acceptable de la courbe de g

Exercice 3 : Barème (6 points)

1. (a) **1,25 point**
   (b) **1,75 point** dont :
   - 0,25 par solution bien placée
   - 0,25 pour la valeur de R (accepter $R = 8^{\frac{1}{6}}$, $R = \sqrt[6]{8}$ et $R = \sqrt{2}$)

   Pénaliser de $0,5$ si les solutions sont bien placées mais que leurs valeurs ne sont pas indiquées
2. **0,5 point**
3. (a) **0,5 point**
   (b) **2 points** dont :
   - 0,5 pour faire apparaître les conjugués de deux des racines non réelles
   - 0,5 pour regrouper les polynômes conjugués deux à deux et développer les produits correspondant
   - 0,5 pour utiliser les formules d'Euler
   - 0,5 pour remplacer par les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et arriver au résultat