Corrigé examen final - MT1A-MT1B-MT1D

Exercice 1 : factorisation de polynômes (7 points)

On se fixe un entier n tel que $n \geqslant 2$.

1.

$$\begin{aligned} Q_3(X) &= (X+1)^3 - X^3 - 1 \\ &= (X^3+3X^2+3X+1) - X^3 - 1 \\ &= 3X^2+3X \\ &= 3X(X+1) \text{ qui admet pour racines } 0 \text{ et } -1 \end{aligned}$$

2. D'après **la formule du binôme** : $(X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \, 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$

$$\text{D'où} \qquad \begin{aligned} Q_n(X) &= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right] - X^n - 1 \\ &= \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} X^k + X^n\right] - X^n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} X^k \\ &= \binom{n}{1} X^1 + \binom{n}{2} X^2 + \binom{n}{3} X^3 + \cdots + \binom{n}{n-1} X^{n-1} \end{aligned}$$

On en déduit que $\deg(Q_n(X)) = n-1$ et que le coefficient dominant de $Q_n(X)$ est : $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

3. On pose $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

$P(0) = (0+1)^7 - 0^7 - 1 = 1^7 - 1 = 1 - 1 = 0$
et $P(-1) = (-1+1)^7 - (-1)^7 - 1 = 0^7 - (-1) - 1 = 1 - 1 = 0$.
Donc $\boxed{\text{0 et 1 sont deux racines entières de } P(X)}$.

4. (a) On sait que les 3 racines cubiques de l'unité sont les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ où $k \in [\![0,2]\!]$, autrement dit les complexes 1 , $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Nous avons donc $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$

(b) — $\overline{j} = \overline{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = j^2$

— $\boxed{j^3 = 1}$ car j est une solution de l'équation $z^3 = 1$

— $j^7 = j^{1+3\times 2} = j\, j^{3\times 2} = j(j^3)^2 = j \cdot 1^2 = j$

— Puisque $j \neq 1$, $1 + j + j^2 = \frac{1 - j^{2+1}}{1-j} = \frac{1-j^3}{1-j} = \frac{1-1}{1-j} = 0 \; (\star)$

— $(j+1)^7 \overset{(\star)}{=} (-j^2)^7 = (-1)^7 (j^2)^7 = -j^{2\times 7} = -(j^7)^2 = -j^2 \; (\diamond)$

(c) On rappelle que $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$.
D'où $P'(X) = 7(X+1)^6 - 7X^6 = 7[(X+1)^6 - X^6]$
et $P''(X) = 7[6(X+1)^5 - 6X^5] = 42[(X+1)^5 - X^5]$

On en déduit que

$$\begin{cases} P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 \overset{(\diamond)}{=} -j^2 - j - 1 = -(j^2+j+1) \overset{(\star)}{=} 0 \\ P'(j) = 7[(j+1)^6 - j^6] \overset{(\star)}{=} 7[(-j^2)^6 - j^6] = 7(j^{12} - j^6) = 7[(j^3)^4 - (j^3)^2] = 0 \\ P''(j) = 42[(j+1)^5 - j^5] \overset{(\star)}{=} 42[(-j^2)^5 - j^5] = 42[-j^{10} - j^5] = 42(-j - j^2) = 42 \end{cases}$$

Nous avons donc $\boxed{P(j) = P'(j) = 0 \text{ avec } P''(j) \neq 0}$, ce qui revient à dire que j est une racine de $P(X)$, de multiplicité 2.

$$P(\overline{j}) = (\overline{j}+1)^7 - \overline{j}^7 - 1 = \overline{(1+j)^7 - j^7 - 1} = \overline{P(j)} = \overline{0} = 0.$$

On vérifie de façon analogue que $P'(\overline{j}) = \overline{P'(j)} = 0$.

5. Le polynôme $P(X)$ admet au moins quatre racines distinctes : 0 , -1 , j et j^2.
Comme les racines j et j^2 sont de multiplicité 2, $P(X)$ est divisible par :

$$(X-0)\,\big(X-(-1)\big)\,(X-j)^2\,(X-j^2)^2 = X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2$$

Il existe donc un polynôme non nul $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que
$P(X) = \left[X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2\right] Q(X)$
avec $\deg(P(X)) = \deg\big(X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2\big) + \deg(Q(X)) = 6 + \deg(Q(X))$
Par conséquent $\deg(Q(X)) = \deg(P(X)) - 6 = 0$ ce qui signifie que $Q(X)$ est un polynôme constant non nul, égal au coefficient dominant de $P(X)$.
Ainsi $Q(X) = 7$ d'après la question 2.

$$\text{Ainsi } \boxed{P(X) = 7X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2}$$

6. On regroupe les facteurs complexes conjugués :
$(X-j)(X-j^2) = X^2 - \underbrace{(j+j^2)}_{-1}X + \underbrace{j\,j^2}_{j^3=1} = X^2 + X + 1$

$$\text{Finalement } \boxed{(X+1)^7 - X^7 - 1 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2}$$

Exercice 2 : analyse (7 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(u_n). \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $\cos(u_n) \in [-1,1]$. De plus,

$$u_n \in [0,1] \implies u_n \in [0,\pi/2] \implies \cos(u_n) \geqslant 0 \implies \cos(u_n) \in [0,1] \implies u_{n+1} \in [0,1].$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } u_n \in [0,1], \text{ alors } u_{n+1} \in [0,1].}$
On admettra donc pour la suite de l'exercice que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1].$$

2. On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \cos(x) - x.$$

Il s'agit de démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$, autrement dit que 0 admet un unique antécédent par f.
La fonction f est continue et dérivable sur $[0,1]$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = -\sin(x) - 1 = -(\sin(x) + 1).$$

Or, pour tout réel x dans l'intervalle $[0,1]$, on a $\sin(x) > -1$. Ainsi,

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) < 0.$$

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $[0,1]$. Elle satisfait donc les hypothèses du théorème de la bijection (continuité et stricte monotonie). Par conséquent, f réalise une bijection de l'intervalle $[0,1]$ dans l'intervalle J tel que :

$$J = f([0,1]) = [f(1), f(0)].$$

Or, $f(0) = 1 \geqslant 0$ et $f(1) = \cos(1) - 1$.
Puisque $\cos(1) \leqslant 1$ on a $f(1) \leqslant 0$. D'où $0 \in [f(1), f(0)] = J$.
On en déduit que 0 admet un unique antécédent α par f dans $[0,1]$. Autrement dit, $\boxed{\text{il existe une unique solution } \alpha \text{ à l'équation } \cos(x) = x \text{ dans l'intervalle } [0,1]}$.

3. La fonction cos est dérivable sur $[0,1]$ de dérivée $\cos' = -\sin$. De plus,

$$\forall x \in [0,1], \quad |\cos'(x)| = |\sin(x)| = \sin(x).$$

La fonction sin est croissante sur $[0,\pi/2]$. Donc :

$$\forall x \in [0,1], \quad \sin(x) \leqslant \sin(1).$$

Ainsi :

$$\forall x \in [0,1], \quad |\cos'(x)| \leqslant \sin(1).$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |\cos(x) - \cos(y)| \leqslant \sin(1)\,|x - y|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité avec $x = u_n$ (ce qui est possible puisque $u_n \in [0,1]$ d'après la question 1) et $y = \alpha$, on a :

$$|\cos(u_n) - \cos(\alpha)| \leqslant \sin(1)\,|u_n - \alpha|.$$

D'après la question 2, on a $\cos(\alpha) = \alpha$. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\cos(u_n) - \alpha| \leqslant \sin(1)\,|u_n - \alpha|}.$$

4. Démontrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant (\sin(1))^n\,|u_0 - \alpha|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété $|u_n - \alpha| \leqslant (\sin(1))^n\,|u_0 - \alpha|$.
— Initialisation. $|u_0 - \alpha| = (\sin(1))^0\,|u_0 - \alpha|$ donc $P(0)$ est vraie.
— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. On a $u_{n+1} = \cos(u_n)$. Donc d'après la question précédente :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \sin(1)\,|u_n - \alpha|.$$

Sachant que $P(n)$ est vraie, il vient :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \sin(1)\Big((\sin(1))^n\,|u_0 - \alpha|\Big).$$

D'où

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant (\sin(1))^{n+1}\,|u_0 - \alpha|.$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
— Conclusion. Par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier n.
Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant (\sin(1))^n\,|u_0 - \alpha|}.$$

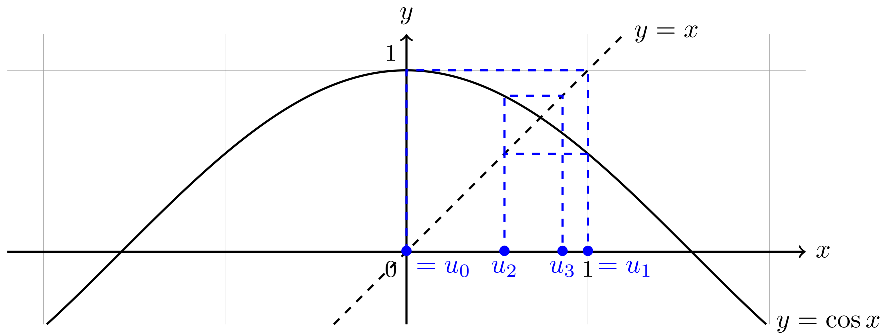
5. On sait que $\sin(1) \in]-1,1[$. Donc $\lim_{n\to+\infty} (\sin(1))^n = 0$. Ainsi, d'après l'encadrement de la question prédédente et le corollaire du théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha}$.

6. On suppose dorénavant que $u_0 = 0$.

(a)



(b) On remarque sur le graphique ci-dessus que $u_0 < u_1$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante. De plus, $u_1 > u_2$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante. Par conséquent, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas monotone}}$.

(c) On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad b_n = u_{2n+1}.$$

On admet que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

On remarque sur le graphique de la question 6(a) que $u_0 \leqslant u_2$, donc $a_0 \leqslant a_1$. La suite $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ étant monotone, on en déduit qu'elle $\boxed{\text{est croissante}}$.
D'autre part, on remarque que $u_3 \leqslant u_1$. Autrement dit, on a : $b_1 \leqslant b_0$. La suite $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ étant monotone, on en déduit qu'elle $\boxed{\text{est décroissante}}$.

(d) D'après la question 5, on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α. Donc ses deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers α. Ainsi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers α. Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0}.$$

D'après la question précédente, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par conséquent $\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes}}$.

(e) On sait déjà que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite α (d'après la question 5). D'après le cours, puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, alors on a l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} \leqslant \alpha \leqslant u_{2n+1}}.$$

Exercice 3 : Vrai ou Faux (6 points)

1. Soient a, b et c trois réels strictement positifs.
L'affirmation « si $abc > 1$, alors $\max\{a,b,c\} > 1$ » est **vraie**. Démontrons-la en raisonnant par contraposée.

$$\begin{aligned}
\max\{a,b,c\} \leqslant 1 &\Longrightarrow (a \leqslant 1 \quad \text{et} \quad b \leqslant 1 \quad \text{et} \quad c \leqslant 1)\\
&\Longrightarrow (ab \leqslant b \quad \text{et} \quad b \leqslant 1 \quad \text{et} \quad c \leqslant 1) \quad \text{par multiplication par } b > 0\\
&\Longrightarrow (ab \leqslant 1 \quad \text{et} \quad c \leqslant 1)\\
&\Longrightarrow (abc \leqslant bc \quad \text{et} \quad c \leqslant 1) \quad \text{par multiplication par } c \text{ (car } c > 0)\\
&\Longrightarrow abc \leqslant 1.
\end{aligned}$$

On en déduit bien, par contraposée, l'implication suivante :

$$abc > 1 \Longrightarrow \max\{a,b,c\} > 1.$$

2. L'affirmation « l'application f est bijective et $f^{-1} = f$ » est **vraie**.

— <u>1ère démonstration.</u>

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad (f \circ f)(A) = f\big(f(A)\big) = f(\overline{A}) = \overline{\overline{A}} = A.$$

Ainsi, $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$.

Posons $g = f$ de sorte que g est une application de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$. D'après un résultat du cours, on en déduit que f est bijective et que $f^{-1} = g$. D'où $f^{-1} = f$.

— <u>2ème démonstration.</u> Soient $Y \in \mathscr{P}(E)$ et $A \in \mathscr{P}(E)$.

$$Y = f(A) \iff Y = \overline{A} \iff \overline{Y} = \overline{\overline{A}} \iff \overline{Y} = A.$$

Par conséquent, l'équation $Y = f(A)$ admet une unique solution A dans $\mathscr{P}(E)$ qui est $\overline{Y}$. Ainsi, tout élément Y de $\mathscr{P}(E)$ admet un unique antécédent par f qui est $\overline{Y}$. Cela signifie que f est bijective et que sa bijection réciproque est l'application :

$$\begin{array}{cccc} f^{-1} & : & \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ & & Y & \mapsto & \overline{Y}. \end{array}$$

On remarque que :

$$\forall Y \in \mathscr{P}(E), \quad f^{-1}(Y) = \overline{Y} = f(Y).$$

Donc $f^{-1} = f$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. L'égalité $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(4h)-f(h)}{h} = 4\,f'(0)$ est **fausse**.

— 1ère démonstration (contre-exemple).
La fonction

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1.$$

De plus,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(4h)-f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h-h}{h} = 3 \neq 4f'(0).$$

— 2ème démonstration (définition de la dérivée).
Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(4h)-f(h)}{h} &= \frac{f(4h)-f(0)+f(0)-f(h)}{h} \\ &= \frac{f(4h)-f(0)}{h} - \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= 4\frac{f(4h)-f(0)}{4h} - \frac{f(h)-f(0)}{h}. \end{aligned}$$

f étant dérivable en 0, on a : $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0)$.
On en déduit, par composition de limites, puisque $\lim_{h\to 0}(4h) = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(4h)-f(0)}{4h} = f'(0).$$

Ainsi,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(4h)-f(h)}{h} = 4f'(0) - f'(0) = 3f'(0).$$

Donc l'affirmation $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(4h)-f(h)}{h} = 4\,f'(0)$ est fausse si $f'(0) \neq 0$.

— 3ème démonstration (théorème des accroissements finis).
Soit $h > 0$. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur le segment $[h, 4h]$ et dérivable sur l'intervalle $]h, 4h[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c_h dans l'intervalle $]h, 4h[$ tel que :

$$f'(c_h) = \frac{f(4h)-f(h)}{4h-h}.$$

Donc

$$f'(c_h) = \frac{f(4h)-f(h)}{3h}.$$

On en déduit

$$\frac{f(4h)-f(h)}{h} = 3f'(c_h).$$

Pour tout $h > 0$, on a construit un réel c_h tel que :

$$h < c_h < 4h.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{h\to 0} c_h = 0.$$

Si on suppose, de plus, que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors f' est continue en 0, donc :

$$\lim_{h\to 0} f'(c_h) = f'(0) \quad \text{et par conséquent} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(4h)-f(h)}{h} = 3f'(0).$$

Ainsi, si $f'(0) \neq 0$, on a :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(4h)-f(h)}{h} \neq 4f'(0).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'affirmation $S_n = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$ est **vraie**.

En effet,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+3+\cdots+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Donc

$$S_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \boxed{2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}.$$

Ainsi,

$$S_n = 2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\right) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p}\right)$$

où la dernière égalité repose sur le changement de variable $p = k+1$ dans la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$. On en déduit :

$$S_n = 2\left(\left[\frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right] - \left[\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} + \frac{1}{n+1}\right]\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2\frac{(n+1)-1}{n+1} = \boxed{\frac{2n}{n+1}}.$$

Exercice 2 : analyse (7,25 points)

1. **0,5 point** pour justifier que si $u_n \in [0,1]$ alors $\cos(u_n) \in [0,1]$.
2. **1,25 point** dont :
   — 0,5 point pour justifier que la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - x$ est strictement décroissante sur $[0,1]$
   — 0,25 point pour écrire que f est continue (ou simplement que f est dérivable)
   — 0,25 point pour mentionner que f est bijective de $[0,1]$ dans $J = [f(1), f(0)]$
   — 0,25 point pour remarquer que $0 \in J$
3. **1 point** dont :
   — 0,5 point pour justifier que $|\cos'| \leqslant \sin(1)$ sur $[0,1]$
   — 0,25 point pour appliquer l'inégalité des accroissements finis à cos entre u_n et α
   — 0,25 point pour rappeler que $\cos(\alpha) = \alpha$
4. **1 point** dont :
   — 0,25 point pour l'initialisation
   — 0,5 point pour l'hérédité (0,25 pour la formulation rigoureuse et 0,25 pour les calculs)
   — 0,25 point pour la conclusion
5. **0,5 point** dont :
   — 0,25 point pour justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin(1))^n = 0$
   — 0,25 point pour préciser que $(u_n)_n$ converge vers α
6. (a) **1 point** dont 0,25 par point correctement placé parmi u_0, u_1, u_2 et u_3

   (b) **0,5 point** dont :
   — 0,25 point pour préciser que $(u_n)_n$ n'est pas décroissante car $u_0 < u_1$
   — 0,25 point pour préciser que $(u_n)_n$ n'est pas croissante car $u_1 > u_2$

   (c) **0,5 point** dont :
   — 0,25 pour indiquer la monotonie de $(a_n)_n$ (sans justification)
   — 0,25 pour indiquer la monotonie de $(b_n)_n$ (sans justification)

   (d) **0,5 point** dont :
   — 0,25 point pour la définition des suites adjacentes
   — 0,25 point pour écrire $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$

   (e) **0,5 point** dont :
   — 0,25 point pour écrire $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$
   — 0,25 point pour écrire $u_{2n} \leqslant \alpha \leqslant u_{2n+1}$

Exercice 3 : vrai/faux (6 points)

On essayera de récompenser les tentatives infructueuses : un(e) étudiant(e) qui a la mauvaise réponse, éventuellement à cause d'une faute de calcul, mais une bonne argumentation peut avoir des points (à l'appréciation du correcteur).

1. **1,5 point**
   — 0,5 pour dire "contraposée"
   — 0,5 pour rédiger la contraposée
   — 0,5 pour penser à dire que les nombres sont positifs
   Exemple de rédaction correcte :
   Par contraposée, supposons le maximum plus petit que 1. Alors tous les nombres sont plus petits que 1, donc leur produit est plus petit que 1 (car ils sont positifs).
2. **1,5 point** Être indulgent pour la rédaction.
   — $0,5$ pour dire que $\bar{\bar{A}} = A$.
   — 1 pour la démonstration dont :
   — $0,5$ pour remarquer que $f \circ f = \mathrm{id}$
   — $0,5$ pour donner la rédaction
   ou
   — $0,5$ pour résoudre $Y = f(X)$
   — $0,5$ pour la rédaction
3. **1,5 point**
   — Si démonstration avec contre-exemple, enlever 0,5 par imprécision (division par zéro, oubli de dire que la fonction est dérivable, etc...)
   — Si démonstration avec le taux d'accroissements, compter $0,5$ pour la définition de la dérivée, $0,5$ pour l'astuce de calcul -ajouter et retrancher $f(0)$- et $0,5$ pour le résultat.
   — Si théorème des accroissements finis, donner $0,5$ point pour les hypothèses, $0,5$ point pour le résultat du théorème et $0,5$ pour la conclusion.
4. **1,5 point**
   — 0,5 pour calculer $\sum\limits_k k$
   — 0,5 pour démontrer que S_n s'écrit comme différence de deux sommes
   — 0,5 pour faire le téléscopage