Examen final

MT1A-MT1B-MT1D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Les 3 exercices seront rendus sur 3 copies différentes.

Nom : . . . . **Prénom :** . . . .

Exercice 1 : factorisation de polynômes (7 points)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère le polynôme :

$$Q_n(X) = (X+1)^n - X^n - 1$$

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $Q_3(X)$.
2. Donner la forme développée de $Q_n(X)$.
   En déduire le degré et le coefficient dominant de $Q_n(X)$.
3. Pour la suite de l'exercice, on prend $n = 7$ et on pose $P(X) = Q_7(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$.
   Proposer deux racines entières évidentes de $P(X)$.
4. (a) Écrire les racines cubiques de l'unité sous forme exponentielle.
   On notera j la racine cubique de l'unité, dont la partie imaginaire est strictement positive.
   (b) Vérifier que $\overline{j} = j^2$.   Simplifier j^3 , j^7 , $1 + j + j^2$ et $(j+1)^7$.
   (c) Prouver que j est une racine de $P(X)$, dont l'ordre de multiplicité est égal à 2.
   En déduire que $P\left(\overline{j}\right) = 0$.
5. Déterminer la décomposition de $P(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
6. Factoriser $(X+1)^7 - X^7 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

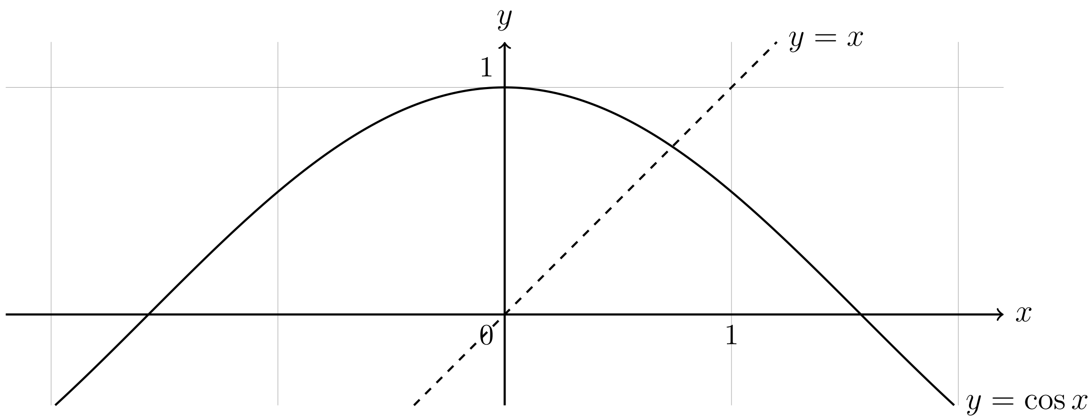
Pensez à changer de copie

Exercice 2 : analyse (7 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(u_n). \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si $u_n \in [0,1]$, alors $u_{n+1} \in [0,1]$. On admettra donc pour la suite de l'exercice que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1].$$
2. Démontrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$ que l'on notera α dans la suite de l'exercice.
3. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\cos(u_n) - \alpha| \leqslant \sin(1)\, |u_n - \alpha|.$$
4. En déduire, en raisonnant par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant (\sin(1))^n\, |u_0 - \alpha|.$$
5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
6. On suppose dorénavant que $u_0 = 0$.
   (a) Sans calcul, positionner sur l'axe des abscisses les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3 sur le graphique ci-dessous.



   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ? Justifier rapidement.
   (c) On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad b_n = u_{2n+1}.$$
   On admet que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. En s'aidant de la question 6a, préciser sans démonstration leur monotonie.
   (d) Justifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (e) En déduire un encadrement de α en fonction de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pensez à changer de copie

Exercice 3 : Vrai ou Faux (6 points)

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse. Une réponse sans justification ne rapporte aucun point. Une réponse erronée n'enlève aucun point.

1. Soient a, b et c trois réels strictement positifs. Si $abc > 1$, alors $\max\{a, b, c\} > 1$.

2. Soit E un ensemble non vide. Pour toute partie A de E, on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E et on désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On considère l'application f définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array}$$

   Alors l'application f est bijective et $f^{-1} = f$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors on a l'égalité suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(4h) - f(h)}{h} = 4\, f'(0)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + 2 + 3 + \cdots + k}$$

   Alors :

$$S_n = 2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{2n}{n+1}$$