NOM : PRÉNOM :

Mathématiques générales - MTA1/MTA2
Tronc Commun
Final - Automne 2016

L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Le barème donné est susceptible d'être modifié.

Chaque exercice est à rédiger sur une copie à part (une copie par exercice), sauf les exercices 1 et 3 pour lesquels on demande de répondre directement sur le sujet.

Exercice 1 : Sommes .... (3,5 points)

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression $(k+1)\,k!$.

   Réponse : ....

2. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$.

   (a) En remarquant que $k = (k+1) - 1$, justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$.

   Réponse : ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (b) En déduire une écriture simplifiée de la somme S_n.

   Réponse : ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

   (a) Simplifier l'écriture de T_n .

Réponse : ....

....

....

....

....

(b) Déterminer, sous réserve d'existence, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{T_n}$.

Réponse : ....

....

....

....

....

....

Exercice 2 : Applications - Nombres complexes .... (5 points)

À rédiger sur une copie séparée

Soit $E = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. On pose pour tout $z \in E$, $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

1. Montrer que : $\forall z \in E,\ 1 - f(z) \neq 0$.
2. f définit ainsi une application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \mapsto & f(z) \end{array} .$$

   Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.
3. Montrer que : $\forall z \in E,\ 1 - |f(z)|^2 = 4\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}$.
4. On pose $U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
   (a) Rappeler la définition de l'ensemble image $f(\mathbb{R})$.
   (b) En utilisant la question 3, démontrer que $f(\mathbb{R}) \subset U \setminus \{1\}$.
   (c) Soit $\alpha \in U \setminus \{1\}$. Puisque f est bijective, il existe un unique nombre complexe $z \in E$ tel que $\alpha = f(z)$. Toujours en utilisant la question 3, montrer que $z \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire l'ensemble $f(\mathbb{R})$.

NOM : PRÉNOM :

Exercice 3 : Logique - Raisonnements ....(2 points)

1. Écrire la négation de l'assertion : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [M, +\infty[,\ |\mathrm{e}^{-x}| \leq \varepsilon$.

   Réponse : ....

2. Soient a et b deux nombres réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On considère l'assertion :

$$\mathscr{A} \ :\ f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b.$$

   (a) Écrire la contraposée de $\mathscr{A}$.

   Réponse : ....

   (b) Écrire la négation de $\mathscr{A}$.

   Réponse : ....

   (c) On suppose dans cette question que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. L'assertion $\mathscr{A}$ est-elle vraie ? Justifier.

   Réponse : ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Exercice 4 : Polynômes ....(5 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

Soient n un entier naturel non nul, et P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z - \alpha| \geq |\mathrm{Im}(z)|$.
2. On suppose dans cette question que P est scindé sur $\mathbb{R}$. En utilisant une factorisation de P, montrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$.
3. On prend dans cette question $P = 1 + X^3$.
   (a) Donner une décomposition de P en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| < |\mathrm{Im}(z_0)|^3$.
4. On suppose dans cette question que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$. Montrer que toutes les racines de P sont réelles. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
5. Énoncer clairement le résultat obtenu dans cet exercice.

Exercice 5 : Dérivabilité .... (5 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

Avertissement : il n'est pas nécessaire de connaître la fonction arctan **pour pouvoir faire cet exercice. Tous les résultats nécessaires concernant cette fonction sont rappelés dans l'énoncé.**

On rappelle que la fonction arctan est la bijection réciproque de la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \tan(t) \end{array}.$$

C'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie entre autres :

$$\lim_{t \to -\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to +\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}.$$

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. En dérivant la relation
$$(\tan \circ \arctan)(y) = y,$$
retrouver la formule :
$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

2. Soit φ la fonction définie par :
$$\varphi \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t\arctan(t) \end{array}.$$

   (a) Soit $x > 0$. Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction φ sur $[x, x+1]$ (on prendra bien soin d'énoncer toutes les hypothèses).

   (b) Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $t \in]x, x+1[$:
$$\frac{x}{1+(1+x)^2} + \arctan(x) < \varphi'(t) < \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan(x+1).$$

   (c) En déduire un encadrement de $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ pour tout $x > 0$.

   (d) En déduire l'existence et la valeur de la limite :
$$\lim_{x \to +\infty} \left((x+1)\arctan(x+1) - x\arctan(x)\right).$$