L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Le barème donné est susceptible d'être modifié.

Les 3 premiers exercices sont à rédiger sur des copies séparées. Vous devez rendre impérativement 3 copies même si vous ne traitez pas tous les exercices.

Exercice 1 .... (3 points)

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, développer $(2a + 3b)^3$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$.

   Calculer $f \circ f$. En déduire que f est bijective.
3. Soit n un entier non nul.
   (a) Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$
   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 2 .... (5 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère la fonction f_n définie par :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{array}$$

1. En remarquant que pour tout réel x, $f_n(x) = e^{-x}\left(1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$, justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad {f_n}'(x) = -e^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$
2. Démontrer que :
$$\forall x \in [0, 1], \quad \left|f_n'(x)\right| \leq \frac{1}{n!}.$$
3. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à f_n sur l'intervalle $[0, 1]$.
4. On considère la suite de terme général $u_n = e\, f_n(1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Utiliser la question 3 pour démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) En déduire la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 3 .... (7 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

On se propose d'étudier la suite $(T_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définis par :

$$\begin{cases} T_0(X) = 1\ , \quad T_1(X) = X\ , \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ T_{n+1}(X) = 2\,X\,T_n(X) - T_{n-1}(X). \quad (\star) \end{cases}$$

1. (a) Calculer $T_n(X)$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

   (b) Parmi ces 5 polynômes, indiquer sans justification, ceux (ou celui) qui sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. On admet que $T_n(X)$ est un polynôme de degré n. On désigne par a_n le coefficient dominant de $T_n(X)$.

   (a) À l'aide de la relation $(\star)$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire pour tout $n \geq 1$, l'expression de a_n en fonction de n.

3. On rappelle que pour tous réels a et b, $\quad 2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

   On se fixe un réel a. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n,

   $$T_n(\cos a) = \cos(n\,a).$$

4. Déterminer les valeurs de $T_n(1)$ et de $T_n(-1)$.

5. On suppose, dans cette dernière question uniquement, que $n = 4$.

   (a) Résoudre dans l'intervalle $[0, \pi]$, l'équation d'inconnue a : $\quad \cos(4\,a) = 0$

   (b) En déduire que le polynôme $T_4(X)$ admet au moins 4 racines réelles distinctes que l'on précisera.

   (c) Décomposer $T_4(X)$ en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

NOM Prénom	
	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
	☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Cette feuille doit impérativement être rendue avec vos copies même si vous ne traitez pas cet exercice. Il vous est demandé d'y inscrire lisiblement vos nom et prénom et de **noircir complètement** *les cases correspondant à votre numéro d'étudiant.*

Exercice 4 - QCM .... (5 points)

Les cases correspondant aux réponses exactes doivent être **complètement noircies**, il ne suffit pas de les cocher. Les bonnes réponses rapportent des points positifs, les mauvaises réponses rapportent des points négatifs.

Question 1 S'il fait beau, alors je mets mon chapeau. Il ne fait pas beau. Que peut-on en déduire ?

☐ Je ne mets pas mon chapeau. ☐ Rien. ☐ Je mets mon chapeau.

Question 2 Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Compléter la définition suivante en choisissant la bonne réponse parmi les propositions ci-dessous. *Définition : on dit que f est bijective si :*

☐ $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\quad y = f(x)$.
☐ $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\quad y = f(x)$.
☐ $\exists! y \in F, \forall x \in E,\quad y = f(x)$.
☐ $\exists y \in F,\ \exists! x \in E,\quad y = f(x)$.

Question 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Choisir parmi les ensembles ci-dessous celui ou ceux qui sont égaux à l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

☐ $\left\{e^{i2k\pi/n},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}$.
☐ $\left\{e^{ik\pi/n},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}$.
☐ $\left\{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\right\}$.
☐ $\left\{e^{i2k\pi/n},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Question 4 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

☐ Faux. ☐ Vrai.

Question 5 On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si :

☐ $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \geq B,\ f(x) \geq A$.
☐ $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \geq A,\ f(x) \geq B$.
☐ $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq M$.
☐ $\exists B \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R},\ \forall x \geq B,\ f(x) \geq A$.