utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

Examen final

MT1A-MT1B-MT1D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Les 3 exercices seront rendus sur 3 copies différentes.

Exercice 1 (7 points)

*Les trois questions **I, II** et **III** de cet exercice sont indépendantes.*

I. Ensembles. Soit E un ensemble quelconque.
Pour toutes parties A et B de E, on définit $A \triangledown B$ par :

$$A \triangledown B = \overline{A \cup B}.$$

On rappelle que $\overline{A} = E \setminus A$ désigne le complémentaire, dans E, de la partie A.

1. Soit A une partie de E. Simplifier les ensembles $A \triangledown \emptyset$, $A \triangledown A$ et $A \triangledown \overline{A}$.
2. Pour deux parties A et B de E, simplifier l'ensemble $(A \triangledown A) \triangledown (B \triangledown B)$.
3. Dans cette question, on suppose que :
$$E = \mathbb{R}, \quad A = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ |x+3| \leqslant 2\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ \lfloor x \rfloor = -6\}.$$
Exprimer $A \triangledown B$ sous la forme d'une réunion d'intervalles.

II. Calcul d'une somme. On fixe un entier naturel non nul n.
Le but de cette question est de calculer la somme S_n suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel $k \in [\![1, n]\!]$, $\qquad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2. En déduire la formule explicite de S_n en fonction de n.

III. Continuité et dérivabilité. *On admet dans cette partie que* $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$

1. (a) Démontrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
   (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.
2. La fonction f' est-elle continue en 0 ? Justifier.
3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant 1.$$

Exercice 2 : fonctions et suite (7 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+ = [0\,,\,+\infty[$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = (x+1)\mathrm{e}^{n\,x}$$

1. Donner la limite de la fonction f_n en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0\,,\,+\infty[$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que l'équation d'inconnue x, $f_n(x) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, notée u_n.

   (b) Déterminer la valeur exacte de u_1.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Simplifier l'écriture du nombre $f_n\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

   (b) Prouver que pour tout entier naturel non nul n,
   $$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$$

   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et donner sa limite.
5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En partant de l'égalité $f_n(u_n) = n$, montrer que
   $$u_n = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(1+u_n)}{n}$$

   (b) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : polynômes et nombres complexes (7 points)

1. Déterminer les racines cubiques de -1 c'est-à-dire les solutions de l'équation
   $$(E)\ :\ z^3 = -1$$
2. On note ω la solution de (E) dont la partie imaginaire est strictement positive.

   (a) Vérifier que $\omega + \overline{\omega} = 1$.

   (b) Démontrer que ω et $\overline{\omega}$ sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.
3. Soient n un entier naturel non nul fixé, et le polynôme
   $$P(X) = X^{2n} - (X-1)^n + X^n + 1$$

   (a) *On admet que* $P\big(\overline{\omega}\big) = \overline{P(\omega)}$
   Démonter que P est divisible par $X^2 - X + 1$ si, et seulement si, $P(\omega) = 0$.

   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur n pour que le polynôme P soit divisible par $X^2 - X + 1$. *On rappelle, d'après* 2(b), *que* $\omega - 1 = \omega^2$.
4. (a) Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $\omega - \overline{\omega}$ et $\omega^n - \overline{\omega^n}$.

   (b) Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $X^2 - X + 1$.