L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Le barème donné est susceptible d'être modifié.

Chaque exercice est à rédiger sur une copie à part.

Exercice 1 (question de cours : 5 points)**.**

1. Énoncer soigneusement la formule du binôme de Newton.
2. On rappelle la formule ci-dessous valable pour tous les entiers naturels non nuls k et n tels que $k \leqslant n$:
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$
Démontrer alors la formule du binôme par récurrence.
3. Soit n un entier naturel. En calculant de deux manières différentes la somme $\sum\limits_{k=0}^{k=n} \left((k+1)^3 - k^3\right)$, en déduire la valeur de la somme $S = \sum\limits_{k=0}^{k=n} k^2$.

Pensez à changer de copie

Exercice 2 (nombres complexes : 5 points)**.**
Soient n un entier naturel fixé, et $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On souhaite résoudre sur I l'équation :
$$(E) \ : \quad \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = 0.$$

1. Justifier que cette équation est bien définie sur I.
2. (a) Soit $x \in I$, vérifier que $\dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos(x)} \neq 1$.

   (b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{\mathrm{e}^{ikx}}{\cos^k(x)}$ (on pourra faire apparaître la somme des termes d'une suite géométrique).

   (c) En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x) \times \cos^n(x)}$$
3. Donner toutes les solutions de (E) sur I.

Pensez à changer de copie

Exercice 3 (suites : 10 points)**.**

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissante telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k,$$

ainsi que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = S_{2n}, \\ v_n = S_{2n+1}. \end{cases}$$

   (a) Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

   (b) En déduire que la suite $(S_n)_n$ converge.

2. Soit $(b_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} b_0 = -\dfrac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n) + \lfloor b_n \rfloor + 1, \end{cases}$$

où $\lfloor b_n \rfloor$ désigne la partie entière de b_n. On admettra l'inégalité ci-dessous que l'on pourra utiliser dans la suite de l'exercice :

$$\forall x \in [-1, 0[, \quad \sin(x) > x.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant b_n < 0.$$

   (b) En déduire une expression simplifiée de b_{n+1} en fonction de b_n.

   (c) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (d) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

   (e) Montrer que la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} b_k$$

   est convergente.