Mathématiques - MT11

Tronc commun

Médian - Automne 2011

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants ne doivent faire usage d'aucun document.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Exercice 1 (4 points) *Les deux parties sont indépendantes.*

Partie A

On considère dans cette partie, les ensembles finis $E = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\}$ et $F = \{a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\,,\,e\}$.

1. Donner, sans explication, le nombre d'applications de E dans F.
2. (a) Proposer un exemple d'application injective de E dans F.
   (b) Quel est le nombre d'injections de E dans F ?

Partie B

1. Étant donnée une application $f : E \longrightarrow F$, rappeler la définition de l'image directe par f d'une partie A de E.
2. On note $\mathbb{U} = \left\{ \mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C} \;/\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
   Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\star & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array}$. Déterminer $f(\mathbb{U})$.

Exercice 1 bis (4 points) *Les deux parties sont indépendantes.*

Partie A

On considère dans cette partie, les ensembles finis $E = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\}$ et $F = \{a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\}$.

1. Donner, sans explication, le nombre d'applications de E dans F.
2. (a) Proposer un exemple d'application surjective de E sur F.
   (b) Calculer le nombre de surjections de E sur F.

Partie B

1. Étant donnée une application $f : E \longrightarrow F$, rappeler la définition de l'image réciproque par f d'une partie B de F.

2. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

   Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+1}{z} \end{array}$. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{U})$.

<u>Exercice 2</u> (8 points)

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = 1$.

   (b) Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

   $$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$$

   On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. (a) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$(l'unité graphique est 5 cm). Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

   $$a = -2 \quad ; \quad b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \quad \text{et} \quad c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

   (b) Prouver que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.

3. Placer le point D d'affixe $d = -\dfrac{1}{2}$.

   Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

   $$z' = \frac{a-c}{d-c}$$

   En déduire le rapport $\dfrac{CA}{CD}$.

   Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

Exercice 3 (8 points)

On considère une suite de nombres réels $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans la partie A, on établit des résultats généraux qui sont utiles pour répondre aux questions 3, 4 et 5 de la partie B. Il est possible de traiter la partie B en premier en admettant, et en utilisant, les résultats de la partie A.

Partie C (3 points)

1. On suppose dans cette question, qu'il existe un intervalle I tel que pour tout naturel n, $u_n \in I$ et f est croissante sur I.
   (a) On suppose que $u_0 \leqslant u_1$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   On admettra que si $u_0 \geqslant u_1$ alors la suite u est décroissante.
   (b) En déduire que si $I = [a, b]$ (avec a, b réels tels que $a < b$) alors la suite u est convergente.
2. On suppose qu'il existe un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ et que $u_0 \in I$.
   Montrer par récurrence que $u_n \in I$ pour tout entier naturel n.
3. Montrer que si f est décroissante sur un intervalle I et si $f(I) \subset I$,
   alors la fonction $g = f \circ f$ est croissante sur I.

Partie D (5 points)

Dans toute la suite de l'exercice, f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\,x(1-x) \qquad \text{et} \qquad u_0 = \frac{1}{2}$$

1. Donner, sans justification, le tableau de variations de f et les images par f des intervalles $[0\,,\,1]$ et $\left[\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{4}\right]$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
3. En utilisant le résultat de la question A-2, montrer que $u_n \in \left[\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{4}\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On pose $g = f \circ f$. En utilisant le résultat de la question A-3, préciser le sens de variation de g sur $\left[\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{4}\right]$.
5. On considère les suites extraites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $\alpha_n = u_{2n}$ et $\beta_n = u_{2n+1}$.
   Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_{n+1} = g(\alpha_n)$ et $\beta_{n+1} = g(\beta_n)$.
   En déduire que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent en utilisant le résultat de la question A-1-b.
6. Justifier que les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont aussi solutions de l'équation $g(x) = x$. *On admet que l'équation $g(x) = x$ ne possède pas d'autre solution que celles de l'équation $f(x) = x$.*
   Déterminer les limites des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.