Exercice 1

Partie A

1. Soient (u_n) une suite, et ℓ un réel. On dit que (u_n) converge vers ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\ \big)$$

2. On dit que (u_n) est bornée lorsque :

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$$

3. cf. cours pour la démonstration. La réciproque est fausse, il suffit de considérer la suite dont le terme général est $u_n = (-1)^n$: cette suite est bornée, mais elle ne converge pas.

Partie B

1. Soient x, et y deux réels positifs. Alors :

$$\begin{array}{rrl} & \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 & \geqslant 0 \\ \Longrightarrow & x - 2\sqrt{xy} + y & \geqslant 0 \\ \Longrightarrow & x+y & \geqslant 2\sqrt{xy} \\ \Longrightarrow & \dfrac{x+y}{2} & \geqslant \sqrt{xy} \end{array}$$

Ce qui est l'inégalité demandée.

2. On démontre les deux inégalités de manière séparée :

$$\begin{array}{rrl} & x & \leqslant y \\ \Longrightarrow & x \times x & \leqslant x \times y \text{ (car } x \text{ est positif)} \\ \Longrightarrow & x & \leqslant \sqrt{xy} \text{ (car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} \text{De plus} & x & \leqslant y \\ \Longrightarrow & x \times y & \leqslant y \times y \text{ (car } y \text{ est positif)} \\ \Longrightarrow & \sqrt{xy} & \leqslant y \text{ (car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante)} \end{array}$$

3. (a) Soit n un entier naturel, définissons l'inégalité $H(n)$ par : «$a_n \leqslant b_n$».
   - $H(0)$ est vraie par hypothèse.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $H(n) \Rightarrow H(n+1)$:
     D'après la question **1.**, $\sqrt{a_n b_n} \leqslant \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
     Ce qui montre que $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$.
   - Ainsi, pour tout entier naturel n, on a démontré que $a_n \leqslant b_n$.

   (b) Soit n un entier naturel, d'après la question **2.**, comme $a_n \leqslant b_n$, on peut en déduire que $\dfrac{a_n + b_n}{2} \leqslant b_n$. Ce qui montre que $b_{n+1} \leqslant b_n$: la suite (b_n) est décroissante.

   (c) Soit n un entier naturel, d'après la question **2.**, comme $a_n \leqslant b_n$, on peut en déduire que $a_n \leqslant \sqrt{a_n b_n}$. Ce qui montre que $a_n \leqslant a_{n+1}$: la suite (a_n) est croissante.

   (d) Ainsi, (a_n) est croissante et majorée (par b_0), donc le théorème de la limite monotone permet de conclure que la suite (a_n) est convergente. Soit ℓ sa limite. De même, (b_n) est convergente, appelons l' sa limite.
   En passant à la limite dans la relation de récurrence qui définit b_{n+1}, on obtient :
   $$l' = \frac{\ell + l'}{2}$$
   Ce qui montre que $\ell = l'$, les deux suites ont la même limite.

   (e) Les suites étant adjacentes, on a l'encadrement $a_1 \leqslant \ell \leqslant b_1$, ce qui donne l'inégalité voulue :
   $$\sqrt{a_0 b_0} \leqslant \ell \leqslant \frac{a_0 + b_0}{2}$$

4. Par la question précédente, on sait que $\sqrt{1 \times 5} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1+5}{2}$. Comme $\sqrt{5} > \sqrt{4}$, cela montre que la partie entière de ℓ vaut 2 (en toute rigueur, il faudrait considérer l'encadrement $a_1 \leqslant \ell \leqslant b_2$ pour démontrer que $\ell \neq 3$).

Exercice 2

Partie A

1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **injective** ssi
$$\forall\,(x,x') \in E^2, \quad [\ (x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x'))\ ]$$
$$\text{c.à.d.}\ \ \forall\,(x,x') \in E^2, \quad [\ (\ f(x) = f(x')\ ) \Longrightarrow (x = x')\ ]$$

2. La fonction exponentielle $\exp : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ est une application injective (car strictement monotone sur $\mathbb{R}$) et non surjective (car zéro n'a pas d'antécédent par exp).

Partie B

1. $f(1+i) = \dfrac{2}{i^2} = -2$ et $f(i) = \dfrac{2}{(i-1)^2} = \dfrac{2}{-2\,i} = i$.

2. (a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8-6i$ revient à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 8-6i$. On pose $z = x+iy$ avec x et y réels.

$$z^2 = 8-6i \iff \begin{cases} x^2+2ixy-y^2 = 8-6i \\ |z^2| = |8-6i| \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2-y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \\ |z|^2 = \sqrt{8^2+(-6)^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2 = 8 \\ x^2+y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$
$$\iff z = 3-i \text{ ou } z = -3+i$$

Le complexe $\boxed{8-6i \text{ admet deux racines carrées opposées : } 3-i \text{ et } -3+i}$

(b) • $f(z) = \dfrac{1}{4-3i} \iff \dfrac{2}{(z-1)^2} = \dfrac{1}{4-3i} \iff (z-1)^2 = 2(4-3i)$
$\iff (z-1)^2 = 8-6i$
$\iff z-1 = 3-i$ ou $z-1 = -3+i$ d'après **B**.2.(a)
$\iff z = 4-i$ ou $z = -2+i$

• $f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{4-3i}\right\}\right) = \left\{z \in E \;/\; f(z) = \dfrac{1}{4-3i}\right\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = \dfrac{1}{4-3i}$.

$$\text{D'où}\quad f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{4-3i}\right\}\right) = \{4-i\,,\ -2+i\}$$

3. (a) • Soit $k \in \mathbb{C}^*$. Alors $f(z) = k \iff (z-1)^2 = 2/k$.
Si on désigne par a une racine carrée du nombre complexe $2/k$, alors la seconde racine carrée de $2/k$ est $-a$ et l'équation $f(z) = k$ admet comme solutions $1+a$ et $1-a$.
Par conséquent tout complexe non nul k admet deux antécédents par f dans l'ensemble E. Ainsi f est surjective de E sur $\mathbb{C}^*$.

• Autrement dit : $f(E) = \mathbb{C}^*$.

(b) Dans la question 2.(b), on a vu que deux complexes distincts $(4-i \neq -2+i)$ avaient la même image par l'application f : $f(4-i) = f(-2+i) = \dfrac{1}{4-3i}$.
f n'est donc **pas injective**.

4. Soit θ un réel tel que $0 < \theta < 2\pi$. Alors $\dfrac{\theta}{2} \in \,]0\,,\pi[$ et $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$.

(a)
$$\begin{aligned} e^{i\theta}-1 &= e^{i\theta/2} \times (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) \\ &= e^{i\theta/2} \times (2i\sin(\theta/2)) \qquad \text{d'après une des formules d'Euler} \\ &= 2\,i\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\,\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

(b) Dans un premier temps, $\left(e^{i\theta}-1\right)^2 = \left[2\,i\,\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\,\frac{\theta}{2}}\right]^2 = -4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\theta}$

On en déduit que $f(e^{i\theta}) = \dfrac{2}{\left(e^{i\theta}-1\right)^2} = \dfrac{1}{-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta}} = \dfrac{-e^{-i\theta}}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Or $-1 = e^{i\pi}$. Donc

$$\boxed{f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i(\pi-\theta)}}$$

(a) • Soit $z \in \Delta \setminus \{1\}$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}^*$ tel que $z = 1+iy$.
D'où $f(z) = \dfrac{2}{(1+iy-1)^2} = -\dfrac{2}{y^2}$. Donc $f(z) \in \mathbb{R}^{-*}$.
Ainsi $f(\Delta \setminus \{1\}) \subset \mathbb{R}^{-*}$.

• Réciproquement, soit r un réel strictement négatif. On a déjà vu que : $f(z) = r \iff (z-1)^2 = 2/r$.
On sait que $a = i\sqrt{\dfrac{2}{|r|}}$ est une racine carrée de $2/r$.
Donc $1+a$ est une solution de l'équation d'inconnue z, $f(z) = r$ avec $1+a = 1+i\sqrt{\dfrac{2}{|r|}} \in \Delta \setminus \{1\}$.
Finalement $f(1+a) = r$ et $\mathbb{R}^{-*} \subset f(\Delta \setminus \{1\})$

On a prouvé que $\boxed{f(\Delta \setminus \{1\}) = \mathbb{R}^{-*}}$

(b) Déterminons $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$. On désigne par $i\,\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

$$\begin{aligned}
z \in f^{-1}(\mathbb{R}^*) &\iff f(z) \in \mathbb{R}^* \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \;/\; \arg\left[f(z)\right] = k\,\pi \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \;/\; \arg\left[\frac{2}{(z-1)^2}\right] = k\,\pi \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \;/\; \arg(2) - \arg\left[(z-1)^2\right] = k\,\pi \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \;/\; -2\arg(z-1) = k\,\pi \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \;/\; \arg(z-1) = -k\,\pi/2 \\
&\iff (z-1) \in \mathbb{R}^* \text{ ou } (z-1) \in i\,\mathbb{R} \setminus \{0\} \\
&\iff z \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ ou } z \in \Delta \setminus \{1\} \\
&\iff z \in (\mathbb{R} \setminus \{1\} \cup \Delta \setminus \{1\})
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{f^{-1}(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R} \setminus \{1\} \cup \Delta \setminus \{1\}}$$