Exercice 1

Partie A

1. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$, $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On obtient en appliquant successivement la formule du binôme, et la formule de De Moivre,
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\mathrm{e}^{ix}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ikx}.$$

3. On peut développer l'expression des deux côtés de l'égalité et remarquer que les parties réelles et imaginaires sont égales. On peut aussi factoriser par l'arc-moitié:
$$1+\mathrm{e}^{ix} = \mathrm{e}^{ix/2}\left(\mathrm{e}^{ix/2} + \mathrm{e}^{-ix/2}\right) = \mathrm{e}^{ix/2} 2\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

4. On déduit des deux précédentes questions que:
$$\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{ix/2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ikx}.$$
Or $\quad \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{ix/2}\right)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{inx/2}$
$= 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)$
De plus:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos(kx) + i\sin(kx))$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) + i \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx).$$
D'où, en identifiant les parties imaginaires:
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) = 2^n \left(\cos\frac{x}{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\,x}{2}\right)}$$

Partie B

Soit $x \in E$.
$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin (A \cap B)\\ &\Leftrightarrow \text{non}(x \in A \text{ et } x \in B)\\ &\Leftrightarrow \text{non}(x \in A) \text{ ou non}(x \in B) \quad \text{(d'après une des lois de De Morgan)}\\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B\\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B}\\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

Partie C

1. f prenant ses valeurs dans E, on a : $\forall k \in E, \quad 1 \leqslant f(k) \leqslant n$. D'où $n \times 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant n \times n$
c'est-à-dire $\quad \boxed{n \leqslant S_n \leqslant n^2}$

2. Comme f est une application bijective de E sur E, f prend chacune des valeurs $1, 2, \ldots, n$:
$$f(E) = \{f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n)\} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$$
Donc, quitte à permuter les termes de la somme,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2

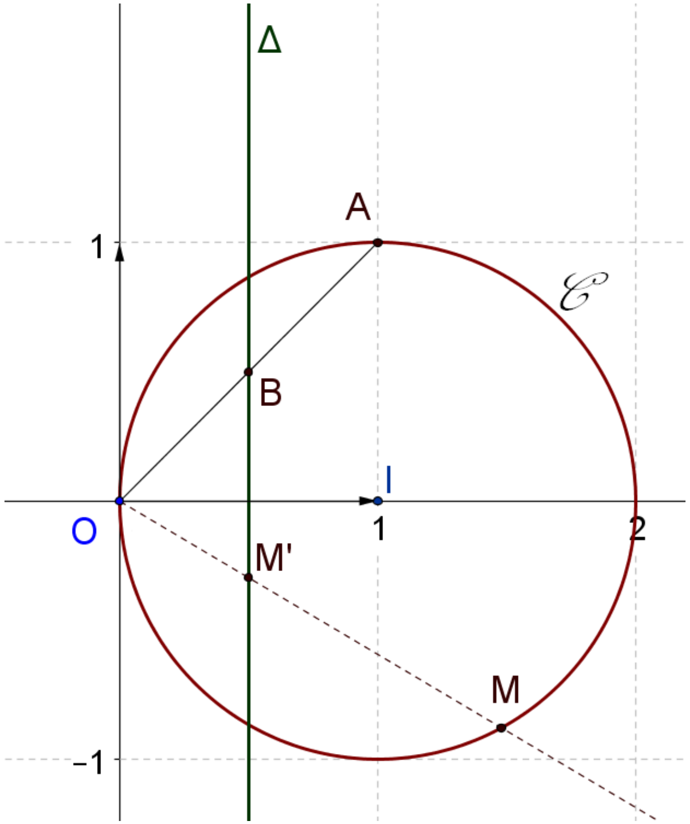
1. (a) Les racines carrées de $2i$ sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 = 2i$.
$$z^2 = 2i \iff z^2 = 2\,\mathrm{e}^{i\,\pi/2} \iff z^2 = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\,\pi/4}\right)^2$$
$$\iff z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\,\pi/4} \text{ ou } z = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\,\pi/4} \iff z = 1+i \text{ ou } z = -1-i$$
(b) On note (E) l'équation : $2\,z^2 - 3(1+i)\,z + 2i = 0$.
Son discriminant est
$$\Delta = [-3(1+i)]^2 - 4 \times 2 \times 2i = 9(1+i)^2 - 16i = 9 \times 2i - 16i = 2i.$$

D'après la question précédente, $\Delta = (1+i)^2$.
Donc l'équation (E) admet deux solutions complexes distinctes :

$$z_1 = \frac{3(1+i)+(1+i)}{2\times 2} = 1+i \qquad \text{et} \quad z_2 = \frac{3(1+i)-(1+i)}{2\times 2} = \frac{1+i}{2}$$

Nous avons bien $|z_2| < |z_1|$ car $|z_2| = \dfrac{|z_1|}{2}$.

(c) Le point B est le milieu du segment $[OA]$.



2. (a) $f(z_1) = \dfrac{1}{\overline{z_1}} = \dfrac{1}{\overline{(1+i)}} = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+i}{1^2-i^2} = \dfrac{1+i}{2}$.
Donc $f(z_1) = z_2$.

(b) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
D'après les propriétés des modules, $|z'| = \left|\dfrac{1}{\overline{z}}\right| = \dfrac{1}{|\overline{z}|} = \dfrac{1}{|z|}$.

D'après les propriétés des arguments, à 2π près,
$\arg(z') = \arg\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = -\arg(\overline{z}) = -(-\arg(z)) = \arg(z)$

(c) Soit O, M et M' les points d'affixes respectives 0, z et z' avec $z \neq 0$.
On sait qu'un argument s'interprète géométriquement en terme d'angle orienté de vecteurs :
$\arg(z) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}}\right)$ et $\arg(z') = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}}\right)$.
Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}}\right)$ modulo 2π et les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires, de même sens.
En particulier les points O, M et M' sont alignés.

3. (a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $(f\circ f)(z) = f[f(z)] = f(z') = \dfrac{1}{\overline{z'}}$.
Or $\overline{z'} = \overline{\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)} = \dfrac{\overline{1}}{\overline{\overline{z}}} = \dfrac{1}{z}$. Donc $(f\circ f)(z) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)} = z$

(b) On vient de prouver que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $(f\circ f)(z) = z$
ce qui signifie que $f\circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^*}$.
Il existe donc une application $g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ telle que $f\circ g = g\circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^*}$.
Dans le cas présent, $g = f$. Par conséquent f est bijective de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^*$ et sa bijection réciproque est $f^{-1} = g = f$.

4. (a) $M(z) \in \mathscr{C} \iff |z-1| = 1 \iff IM = 1$.
$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre le point I et de rayon 1.

(b)

$$\begin{aligned}
|1-z'| = |z'| &\iff \left|1-\frac{1}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{1}{\overline{z}}\right| \\
&\iff |\overline{z}| \times \left|1-\frac{1}{\overline{z}}\right| = |\overline{z}| \times \left|\frac{1}{\overline{z}}\right| \\
&\iff \left|\overline{z}\times\left(1-\frac{1}{\overline{z}}\right)\right| = \left|\overline{z}\times\frac{1}{\overline{z}}\right| \\
&\iff |\overline{z}-1| = |1| \\
&\iff \left|\overline{(z-1)}\right| = 1 \\
&\iff |z-1| = 1
\end{aligned}$$

(c) On pose $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^* \ / \ |z-1| = 1\}$.

$$\begin{array}{rcll}
z' \in f(\Gamma) & \Leftrightarrow & \exists\, z \in \Gamma \ / \ z' = f(z) & \\
& \Leftrightarrow & \exists\, z \in \mathbb{C}^* \ / \ [\, z' = f(z) \ \text{ et } \ |z-1| = 1\,] & \text{par définition de } \Gamma \\
& \Leftrightarrow & \exists\, z \in \mathbb{C}^* \ / \ [\, z' = f(z) \ \text{ et } \ |1-z'| = |z'|\,] & \text{d'après 4.(b)} \\
& \Leftrightarrow & |1-z'| = |z'| \quad \text{et } \ \exists\, z \in \mathbb{C}^* \ / \ z' = f(z) & \\
& \Leftrightarrow & |1-z'| = |z'| \qquad \text{car } f \text{ est bijective} & \\
& \Leftrightarrow & IM' = OM' \quad \text{où } M' \text{ est le point d'affixe} z' & \\
& \Leftrightarrow & M' \in \Delta \qquad \text{où } \Delta \text{ désigne la médiatrice du segment } [OI] & \\
& \Leftrightarrow & \Re e(z') = \dfrac{1}{2} &
\end{array}$$

Ainsi $f(\Gamma)$ est l'ensemble des nombres complexes z' dont la partie réelle $\Re e(z')$ est égale à $1/2$:

$$f(\Gamma) = \left\{ z' \in \mathbb{C} \ / \ \Re e(z') = \frac{1}{2} \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{2} + i\,y \right) \in \mathbb{C} \ / \ y \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour construire géométriquement le point M' d'affixe $z' = f(z)$ à partir d'un point $M(z)$ de $\mathscr{C} \setminus \{O\}$, on trace la demi-droite $[OM)$. Le point M' est le point d'intersection entre cette demi-droite et la droite verticale Δ d'équation $x = 1/2$.