Mathématiques - MT11

Tronc commun

Médian - Automne 2013

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants ne doivent faire usage d'aucun document.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite. Les deux exercices sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 (8 poins)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Soit x un nombre réel et n un entier naturel non nul.

1. Rappeler la formule du binôme qui développe $(a+b)^n$ pour tous complexes a et b.
2. Développer $\left(1+\mathrm{e}^{i\,x}\right)^n$.
3. Montrer que $1+\mathrm{e}^{i\,x} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{i\,x/2}$.
4. En déduire la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$.

Partie B

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On désigne par $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Démontrer que

$$\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$$

Partie C

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ et $E=\{1,\,2,\,3,\,\dots,\,n\}$. On se donne une application f de E dans E.

1. Déterminer un encadrement de la somme $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)$.
2. Que vaut cette somme lorsque f est bijective de E sur E ?

Pensez à changer de copie.

Exercice 2 (12 points)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$.
On prendra pour le dessin $\|\overrightarrow{u}\| = 4$ cm.

1. (a) Calculer les racines carrées de $2i$.

   (b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

   $$2\,z^2 - 3(1+i)\,z + 2i = 0$$

   On notera z_1 et z_2 les solutions de cette équation sachant que $|z_2| < |z_1|$.

   (c) Placer dans le plan $\mathcal{P}$ les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 .

2. On considère l'application $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ qui, à tout nombre complexe z non nul, associe le nombre

   $$z' = f(z) = \frac{1}{\overline{z}} = (\overline{z})^{-1}$$

   où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

   (a) Calculer l'image de z_1 par f.

   (b) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$. Déterminer une relation entre les modules de z et z', puis une relation entre les arguments de z et z'.

   (c) Montrer que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M' d'affixes respectives 0, z et z' sont alignés.

3. (a) Pour tout complexe $z \neq 0$, déterminer $(f \circ f)(z)$.

   (b) f est-elle bijective ?

4. On désigne par I le point d'affixe 1. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ dont l'affixe z vérifie : $|z-1| = 1$.

   (a) Quelle est la nature géométrique de l'ensemble $\mathscr{C}$?
   Tracer $\mathscr{C}$ sur la figure de la question 1.(c).

   (b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que

   $$|1 - z'| = |z'| \iff |z-1| = 1$$

   (c) On pose $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^* \ / \ |z-1| = 1\}$.
   Déduire de la question précédente, l'image $f(\Gamma)$ de l'ensemble Γ par l'application f.