Exercice 1 (**Corrigé** - 12 points)**.**

1. (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par changement de variable dans la première somme, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) &= \sum_{k=1}^{N}\sqrt{k+1}-\sum_{k=1}^{N}\sqrt{k} = \sum_{p=2}^{N+1}\sqrt{p}-\sum_{k=1}^{N}\sqrt{k} \\ &= \left(\sum_{k=2}^{N}\sqrt{k}+\sqrt{N+1}\right)-\left(\sqrt{1}+\sum_{k=2}^{N}\sqrt{k}\right) \\ &= \sqrt{N+1}-1.\end{aligned}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{(k+1)-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{A(k)},$$

où $A(k) = \sqrt{k+1}+\sqrt{k}$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1(b), $2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$. Puisque $k \leq k+1$, on a $2\sqrt{k} \leq \sqrt{k+1}+\sqrt{k} \leq 2\sqrt{k+1}$. D'où par passage à l'inverse :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{2}{2\sqrt{k+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leq \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

i.e.

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2. On pose pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après $(\star)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$. Donc :

$$S_n \geq \sum_{k=1}^{n}2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right).$$

D'après 1(a) avec $N = n$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1}-1$. On en déduit que

$$S_n \geq 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) = 2\sqrt{n+1}-2.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}}+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Par le changement d'indice $k = p+1$ dans la dernière somme on a :

$$S_n = 1+\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{p+1}} = 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

D'après $(\star)$, pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$. D'où,

$$S_n \leq 1+\sum_{k=1}^{n-1}2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = 1+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right).$$

D'après 1(a) avec $N = n-1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \sqrt{n}-1$. Ainsi,

$$S_n \leq 1+2\left(\sqrt{n}-1\right) = 2\sqrt{n}-1.$$

(c) D'après 2(a)et 2(b), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1}-2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n}-1$, donc

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leq 1-\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

(d) $\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1} = 1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$. De même $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = 1$. Le théorème des gendarmes permet de déduire de l'encadrement obtenu en 2(c) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$ c'est-à-dire que S_n est équivalente à $2\sqrt{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = S_n - 2\sqrt{n}$ et $u_n = w_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

(a) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}w_{n+1}-w_n &= \left(S_{n+1}-2\sqrt{n+1}\right)-\left(S_n-2\sqrt{n}\right) \\ &= \left(S_{n+1}-S_n\right)-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\ &\leq 0 \quad \text{d'après } (\star).\end{aligned}$$

Donc la suite $(w_n)_n$ est décroissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(w_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \left(w_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= (w_{n+1} - w_n) - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &\geq 0 \quad \text{d'après } (\star). \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_n$ est croissante.

- $\lim_{n\to+\infty} (u_n - w_n) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. On en déduit donc que les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont adjacentes.

(b) $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ étant adjacentes, elles convergent vers la même limite que l'on note ℓ. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n = w_n - \ell$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\varepsilon_n = S_n - 2\sqrt{n} - \ell$ donc :

$$S_n = 2\sqrt{n} + \ell + \varepsilon_n.$$

Exercice 2 (**Corrigé** - 4 points)**.**

Soient A, B et C trois ensembles.

1. L'assertion $C \subset (A \cup B) \implies (C \subset A$ ou $C \subset B)$ est fausse en général. On peut construire un contre-exemple : si on pose $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$ et $C = [-1, 1]$, alors on a $C = A \cup B$ et donc $C \subset A \cup B$. Pourtant C n'est inclus ni dans A, ni dans B (car C possède des éléments qui ne sont pas dans A et des éléments qui ne sont pas dans B).
2. Supposons que $A \cup B = B \cap C$. Démontrons alors que $A \subset B \subset C$.

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x \in A \text{ ou } x \in B \\ &\implies x \in A \cup B \\ &\implies x \in B \cap C \quad \text{car } A \cup B = B \cap C \\ &\implies x \in B \text{ et } x \in C \\ &\implies x \in B. \end{aligned}$$

Tout élément de A est un élément de B donc $A \subset B$. De même,

$$\begin{aligned} x \in B &\implies x \in A \text{ ou } x \in B \\ &\implies x \in A \cup B \\ &\implies x \in B \cap C \quad \text{car } A \cup B = B \cap C \\ &\implies x \in B \text{ et } x \in C \\ &\implies x \in C. \end{aligned}$$

Donc $B \subset C$. Ainsi on a bien :

$$A \subset B \subset C.$$

Exercice 3 (**Corrigé** - 4 points)**.**

1. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} (E)\ &:\ \left|2 - x^2\right| \leq 1 \\ \iff& -1 \leq 2 - x^2 \leq 1 \\ \iff& -3 \leq -x^2 \leq -1 \\ \iff& 1 \leq x^2 \leq 3 \\ \iff& x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E)\ &:\ \left|3 - x^2\right| \leq 2 \\ \iff& -2 \leq 3 - x^2 \leq 2 \\ \iff& -5 \leq -x^2 \leq -1 \\ \iff& 1 \leq x^2 \leq 5 \\ \iff& x \in [-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E)\ &:\ \left|3 - x^2\right| \leq 1 \\ \iff& -1 \leq 3 - x^2 \leq 1 \\ \iff& -4 \leq -x^2 \leq -2 \\ \iff& 2 \leq x^2 \leq 4 \\ \iff& x \in [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]. \end{aligned}$$

2. Soit $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\{2;3\}) &\iff f(x) \in \{2;3\} \\ &\iff \lfloor x \rfloor \in \{2;3\} \\ &\iff \lfloor x \rfloor = 2 \text{ ou } \lfloor x \rfloor = 3 \\ &\iff 2 \leq x < 3 \text{ ou } 3 \leq x < 4 \\ &\iff 2 \leq x < 4, \\ &\iff x \in [2;4[\end{aligned}$$

donc $f^{-1}(\{2;3\}) = [2;4[$.

De la même façon, on démontre que $f^{-1}(\{1;2\}) = [1;3[$, et $f^{-1}(\{0;1\}) = [0;2[$.