Médian MTA1 - Automne 2019
Durée : 1h30

Informations importantes

- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- **Le barème donné est susceptible d'être modifié.**
- **Les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte.**
- **La présentation, la qualité de la rédaction et la rigueur de raisonnement comptent pour une part importante dans la note.**

Exercice 1 - Suites et sommes .... (12 points)

1. (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Expliciter, à l'aide d'un téléscopage, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Écrire $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ sous forme d'une fraction de type $\dfrac{1}{A(k)}$ où l'expression $A(k)$ est à déterminer.

   (c) En déduire que :

   $$(\star)\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

   Ce résultat pourra servir dans les questions 2 et 3.

2. On pose pour tout entier naturel n non nul,

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

   (a) En utilisant la question 1, démontrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2.$$

   (b) En remarquant que $S_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et en utilisant la question 1, démontrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

   (c) En déduire un encadrement de $\dfrac{S_n}{2\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (d) Déduire de cet encadrement une suite équivalente à $(S_n)_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On pose alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$w_n = S_n - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad u_n = w_n - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

   (a) Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont adjacentes.

   (b) En déduire qu'il existe une constante réelle ℓ et une suite $(\varepsilon_n)_n$ telles que

   $$S_n = 2\sqrt{n} + \ell + \varepsilon_n \ \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Rédiger sur une nouvelle copie les exercices 2 et 3

Exercice 2 - Ensembles .... (4 points)

Soient A, B et C trois ensembles.

1. L'assertion $C \subset (A \cup B) \implies (C \subset A \text{ ou } C \subset B)$ est-elle vraie ? Justifier.
2. Démontrer l'implication : $A \cup B = B \cap C \implies A \subset B \subset C$.

Exercice 3 - Inéquations - Applications .... (4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E) : $\left|2 - x^2\right| \leq 1$.
2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$. Déteminer l'image réciproque $f^{-1}(\{2;3\})$ de l'ensemble $\{2;3\}$ par f.