

Les nombres complexes

1 Écrire sous forme algébrique :

$$1. i \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i \right)$$

$$2. \frac{1}{4-3i}$$

$$3. (1+i)(1-2i)$$

$$4. \frac{1-i}{3+2i} + 2 \frac{1+3i}{2-3i}$$

2 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$A = (2+i)(1-i)^2$$

$$C = \frac{3+2i}{1+i} - \frac{1-2i}{1-i}$$

$$B = \frac{1+2i}{1-i}$$

$$D = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$$

3 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant :

$$\left| \frac{z-1}{z+3} \right| = 1.$$

4 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M d'affixe z où z vérifie l'équation donnée :

a) $\operatorname{Re}(z+1) = 0$

b) $|z| = 2$

c) $|z+1| = |z|$.

5 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E) : z - 2\bar{z} + 2 = 0.$$

6 Soit $z = \frac{a+ib}{c+id}$ où a, b, c et d sont des nombres réels tels que $c+id \neq 0$. Trouver une relation entre a, b, c et d pour que :

1. z soit un nombre réel,
2. z soit imaginaire pur.

7 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E) : 2\bar{z} - 2 + 6i = z.$$

8 Soient z et z' deux nombres complexes. Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ou fausses? Le démontrer.

A_1 : Si $z - \bar{z} = 0$ alors $z = 0$.

A_2 : Si $|z| = 1$ et que $|z+z'| = 1$ alors $z' = 0$.

A_3 : Si $\operatorname{Im}(z+z') = 0$ alors z et z' sont conjugués.

A_4 : Si z est sur le cercle trigonométrique alors $1/z$ l'est aussi.

9 Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}, \quad z_2 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{2-2i}, \quad \text{et} \quad z_3 = (1-i)^6.$$

10 On pose :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = 1-i.$$

1. Donner la forme exponentielle de $z_1 z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

11 Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Écrire $\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$ sous forme algébrique.

12 Soit $x \in \mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin(2x)\cos(3x)$,

3. $\cos^3 x + 2\cos^2 x$,

2. $\cos^2 x \cdot \sin^2 x$,

4. $\sin^2(3x) + \cos^2(2x)$.

13 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

S'exprimer et raisonner en mathématiques

1. Les essentiels

14 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

- | | |
|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1. f ne prend que des valeurs positives | 4. f est bornée |
| 2. f s'annule | 5. f n'est pas la fonction nulle |
| 3. f est majorée | 6. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts. |

15 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1. f est la fonction nulle | 4. f est paire |
| 2. f s'annule une seule fois | 5. f atteint toutes les valeurs de \mathbb{N} . |
| 3. f est bornée | |

16 Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I . Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

- | | |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$ | 3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$ |
| 2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$ | 4. $\forall x \in I, (f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0)$. |

17 Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I . Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

- | | |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1. $\forall x \in I, f(x) \leq 0$ | 3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) + M = 0$ |
| 2. $\forall z > 0, \exists x \in I, f(x) = z$ | 4. $\forall x \in I, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$. |

18 1. Si P et Q sont deux assertions logiques, rappeler la négation et la contraposée de $P \Rightarrow Q$.

2. On se donne deux nombres réels a et b . On considère l'implication (\star) suivante :

$$(\exists k \in \mathbb{Z}, a = b + 2k\pi) \Rightarrow \sin(a) = \sin(b).$$

- Cette implication (\star) est-elle vraie ?
- Écrire la contraposée de l'implication (\star) .
- Écrire la négation de l'implication (\star) .
- Écrire la réciproque de l'implication (\star) . Cette réciproque est-elle vraie ? Pourquoi ?

2. Pour travailler seul

19 Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I à valeurs réelles. Exprimer verbalement les assertions suivantes :

- $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C,$
- $\forall x \in I, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0),$
- $\forall x \in I, \forall y \in I, (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)),$
- dans le cas où $I = \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) = f(x).$

20 Les phrases suivantes signifient-elles $A \Rightarrow B$ ou $B \Rightarrow A$?

- Si A , alors B .
- Pour que A , il faut que B .
- Pour que A , il suffit que B .
- A est une condition suffisante pour B .
- A est une condition nécessaire pour B .
- A dès que B .
- A est faux si B l'est.

21 On considère l'assertion (P) : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \geq 5 \Rightarrow x \geq \sqrt{5})$. Écrire la négation de (P). (P) est-elle vraie ? Justifier la réponse.

22 On définit les assertions suivantes :

- D : « Je dors. »
- T : « Je travaille. »
- P : « Je parle. »
- R : « Je rêve. »

Exprimer sous forme symbolique les affirmations ci-dessous.

1. Je travaille et je rêve, mais je ne dors pas.
2. Quand je travaille, je ne parle pas.
3. Chaque fois que je travaille, je parle mais je ne dors pas.
4. Si je travaille ou si je parle, alors je dors.
5. Il suffit que je travaille pour que je rêve.
6. Une condition nécessaire pour que je travaille et que je parle est que je rêve.
7. Je travaille et je parle si et seulement si je rêve ou je dors.
8. Soit je travaille et je rêve, soit si je dors alors je ne parle pas.

23 « Si je vais au cinéma, alors je porte mes lunettes et je ne dors pas. Si je ne dors pas, alors je mange des pop corn. Je ne mange pas de pop corn. » Que peut-on en déduire ?

- | | |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Je dors. | <input type="checkbox"/> Je vais au cinéma et je dors. |
| <input type="checkbox"/> Je ne dors pas. | <input type="checkbox"/> Je ne porte pas mes lunettes |
| <input type="checkbox"/> Je ne vais pas au cinéma. | et je ne vais pas au cinéma. |
| <input type="checkbox"/> Je ne porte pas mes lunettes. | |

Trigonométrie et compléments de calcul algébrique

1. Équations et inéquations

24 Encadrer $x + y, x - y, xy$ et $\frac{x}{y}$ sachant que $x \in [3;6]$ et $y \in [-4;2]$.

25 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = [x] + (x - [x])^2$.

- Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, [x + 1] = [x] + 1$.
- En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 1) = 1 + f(x)$.
- Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2;2]$.

26 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes d'inconnue x :

$$(E_1): |x - 5| = 2|x + 5| \qquad (E_3): x + |x - 1| = 1 + |x|$$

$$(E_2): |2 - x| + |2x - 1| = 2 \qquad (E_4): 2x^2 + |x - 1| = |x + 1|$$

27 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes d'inconnue x :

- $x^3 + 5x \leq 6x^2$
- $|x - 2| + |x - 1| < 3$
- $|1 - 2x^2| \geq 3$
- $x^2 + |x - 1| - |2x + 1| < 0$.

2. Trigonométrie

28 Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes d'inconnue x et placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions.

- $\sin x = \frac{1}{2}$
- $2 \sin^2 x = 1$
- $\sin^2 x + 3 \cos x + \frac{3}{4} = 0$
- $\sin(2x) = \cos(x)$.
- $2 \cos x = \sqrt{3}$
- $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sqrt{2}$
- $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$
- $\tan(x) = \sqrt{3}$.

29 Résoudre dans $[0;2\pi[$ les inéquations trigonométriques :

$$2 \sin x \leq \sqrt{3}, \quad 1 + 2 \sin x \geq 0, \quad 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 > 0.$$

30 Résoudre dans $[-\pi, \pi[$ les inéquations suivantes :

$$2 \cos(x) \geq 1, \quad |\sin(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos^2 x > 1.$$

31 1. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation suivante d'inconnue x :

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}.$$

2. Résoudre dans $[-\pi, \pi[$ l'équation ci-dessous d'inconnue x :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Produits et sommes

32 Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole \sum ou le symbole \prod :

$$A_n = 2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + n^5,$$

$$B_n = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n - 2) \times (2n),$$

$$C_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n,$$

$$D = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3^3}\right) \left(1 - \frac{1}{3^5}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{3^{101}}\right).$$

33 Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole \sum ou le symbole \prod :

$$A_n = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n-1},$$

$$B_n(x) = 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots + 1024x^{10},$$

$$C_n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n,$$

$$D_n = (2 + 3^2) \times (2 + 3^4) \times (2 + 3^6) \times \dots \times (2 + 3^{84}).$$

34 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$;
2. $\sum_{k=0}^n 2^{2k}$;
3. $\sum_{i=0}^n \frac{2^i}{3^{2i-1}}$;
4. $\sum_{k=1}^n \left(k - \frac{3}{5^k}\right)$;
5. $\sum_{k=n}^{2n} (3k-2)$.

35 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1} (3k+2)$;
2. $\sum_{k=0}^n 3^{2k}$;
3. $\sum_{i=0}^n \frac{3^i}{2^{3i+2}}$;
4. $\sum_{k=1}^n \left(2k - \frac{5}{7^k}\right)$;
5. $\sum_{k=n}^{2n} (2k-3)$.

36 Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$.

1. Vérifier que pour tout réel θ , $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$.
2. Calculer la somme : $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$.
3. En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

37 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que lorsque k est un entier naturel non nul :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}. \text{ Calculer alors } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

38 1. Pour k entier, développer la différence : $(k+1)^3 - k^3$.

2. En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ la somme : $\sum_{k=1}^n k^2$.

3. Calculer : $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1)$.

39 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes avec la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{j=1}^{2n} 3^j \binom{2n}{j}.$$

40 Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$.

4. Pour travailler seul

41 Pour tout réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x . Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

42 En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \tan\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

En déduire les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

43 Soit $x \in [0, \pi]$. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leq n \sin(x).$$

44 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=n}^{2n} \sqrt{3^k}$;
2. $\sum_{k=0}^{2n} |k-n|$;
3. $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$;
4. $\prod_{j=1}^n x^j$ où $x \in \mathbb{R}$;
5. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$, où $n \geq 2$.

45 Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$P_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ par la formule du binôme de Newton, simplifier P_n et S_n .

Suites réelles

1. Les essentiels

46 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1; & u_1 = 1; \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n. \end{cases}$$

On définit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \quad \text{et} \quad b_n = 2^n u_n.$$

- Démontrer que $(a_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme a_0 . Exprimer a_n en fonction de n .
- Démontrer que $(b_n)_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme b_0 . Exprimer b_n en fonction de n .
- En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

47 On pose :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 3u_n}. \end{cases}$$

- Démontrer que $u_n > 0$ pour tout entier n .
- On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n}$.
 - Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier n .
 - En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout n .

48 On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

- Démontrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ .

2. En déduire un encadrement de ℓ d'amplitude 10^{-5} .

49 Soit $(s_n)_n$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

- Prouver que les suites $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
- En déduire que la suite $(s_n)_n$ est convergente.

50 *La constante d'Euler*. On admet que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

On pose pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n \geq \ln n + \frac{1}{n}$. *Indication* : $H_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$.
- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n \leq 1 + \ln n$. *Indication* : $H_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$.
- En déduire un encadrement de $\frac{H_n}{\ln n}$ puis un équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- On pose alors pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n = H_n - \ln n \quad \text{et} \quad w_n = v_n - \frac{1}{n}.$$

- Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
- En déduire qu'il existe une constante réelle γ et une suite $(\varepsilon_n)_n$ telles que

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

51 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

- | | | |
|------------------------------|-------------------------|----------------------------------|
| 1. $u_n = \frac{3^n}{2^n}$ | 4. $u_n = 5n + 7 - n^2$ | 7. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ |
| 2. $u_n = \frac{2n+3}{3n-5}$ | 5. $u_n = n - \ln n$ | |
| 3. $u_n = e^{1-n}$ | 6. $u_n = n + 5 \cos n$ | 8. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ |

52 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

- | | | |
|------------------------------------------|----------------------------------|----------------------------|
| 1. $u_n = \frac{2^n}{3^n}$ | 3. $u_n = n - \exp(n)$ | 6. $u_n = \frac{2n^5}{n!}$ |
| 2. $u_n = \frac{2n^2 + 3n}{n^2 - n + 2}$ | 4. $u_n = 2 \sin(n) - n$ | 7. $u_n = \frac{n!}{3^n}$ |
| | 5. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ | |

53 Démontrer les relations ci-dessous :

$$n^3 + 3n \sim n^3, \quad n - \ln(n) \sim n, \quad 3 \ln(n) \neq \ln(n).$$

54 Démontrer les relations ci-dessous :

$$2n^2 - n \sim 2n^2, \quad \exp(2n) + n^3 + n! \sim n!, \quad 2n^2 \neq n^2.$$

55 On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

56 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

2. Pour travailler seul

57 Quelle est la raison d'une suite géométrique $(u_n)_n$ telle que :

$$u_0 = 90 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = 150 ?$$

58 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + \pi. \end{cases}$$

1. Soit α un nombre réel. Déterminer α pour que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique.
2. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

59 Considérons la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} -1 < u_0 < 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n + 4}. \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$.
(b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

60 *Médian 2014.* 1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissante telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k,$$

ainsi que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = S_{2n}, \\ v_n = S_{2n+1}. \end{cases}$$

- (a) Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
(b) En déduire que la suite $(S_n)_n$ converge.

2. Soit $(b_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n) + \lfloor b_n \rfloor + 1, \end{cases}$$

où $\lfloor b_n \rfloor$ désigne la partie entière de b_n . On admettra l'inégalité ci-dessous que l'on pourra utiliser dans la suite de l'exercice :

$$\forall x \in [-1, 0[, \quad \sin(x) > x.$$

(a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq b_n < 0.$$

- (b) En déduire une expression simplifiée de b_{n+1} en fonction de b_n .
(c) Démontrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
(d) Démontrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(e) Démontrer que la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k$$

est convergente.

Ensembles et applications

1. Les essentiels

61 On considère l'ensemble $E = \{a; b; c\}$. Peut-on écrire

- | | | |
|------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------|
| 1. $a \in E$? | 4. $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$? | 7. $\{\emptyset\} \subset E$? |
| 2. $a \in E$? | 5. $\emptyset \subset E$? | 8. $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(E)$? |
| 3. $\{a\} \subset E$? | 6. $\emptyset \in E$? | 9. $\{a\} \in E$? |

62 Pour chacune des applications f ci-dessous, étudier la bijectivité de f et déterminer sa bijection réciproque le cas échéant.

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$
$z \mapsto z $ | 3. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow [3, +\infty[$
$x \mapsto x^2 + 3$ |
| 2. $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$
$x \mapsto \frac{1}{x-2} + 3$ | 4. $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ |

63 Pour chacune des applications f ci-dessous, étudier la bijectivité de f et déterminer sa bijection réciproque le cas échéant.

- | | |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
$n \mapsto n + 1$ | 4. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (2x + y, x - 2y)$ |
| 2. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
$n \mapsto n + 1$ | 5. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x, y^2)$ |
| 3. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
$n \mapsto 2n$ | 6. $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ |

64 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto e^x$ $x \mapsto x^2$

Déterminer les ensembles $f(\mathbb{R})$ et $g([-1; 4])$.

65 Déterminer les ensembles $f(]1, +\infty[)$ et $f^{-1}([-1, 0])$ où f est l'application :

$$f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x).$$

66 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{2; 3\})$ de l'ensemble $\{2; 3\}$ par f .
 $x \mapsto [x]$

67 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Déterminer $f^{-1}([-1, 8])$.
 $x \mapsto x^2$

2. Pour travailler seul

68 Soient E un ensemble non vide et a un élément de E . Expliciter l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$.

69 Étant données A et B deux parties d'un ensemble E , démontrer les équivalences suivantes :

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $A \subset B \iff A \cup B = B$ | 2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$ |
|------------------------------------|-------------------------------------|

70 On considère deux applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f(n) = 2n, \quad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

- f est-elle bijective ?
- g est-elle bijective ?
- Déterminer $(g \circ f)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Démontrer que $f \circ g \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$ puis calculer $(f \circ g)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

71 Dire si les applications suivantes sont bijectives. Le cas échéant, déterminer la bijection réciproque.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & g : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (x, y) &\mapsto (2x - y, x + y) & z &\mapsto \sqrt{2z} + iz, \\ \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ X &\mapsto \{1; 2; 3\} \cup X \end{aligned}$$

72 *Final 2017.* Soit $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
$$n \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Calculer $f \circ f$. En déduire que f est bijective.

Limites et continuité

1. Les essentiels

73 Étudier la limite éventuelle en zéro de la fonction $f : x \mapsto \dots$

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 1. $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ | 5. $\frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ |
| 2. $\frac{x - \ln x}{x}$ | 6. $\frac{\cos x}{x^2}$ |
| 3. $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ | 7. $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$ |
| 4. $\frac{\sin(3x)}{x}$ | 8. $\frac{\cos x - 1}{x^2}$ |

74 Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

- | | |
|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 - x}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + 2x}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ | 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln x)$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right]$ |

75 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right).$$

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2) - \ln(1 + e^{-2x}) \\ &= \ln(2) + 2x - \ln(1 + e^{2x}). \end{aligned}$$

2. Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

76 Démontrer les équivalents ci-dessous entre fonctions.

- | | |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \sim_{+\infty} 2x$ | 3. $\sin(e^x - 1) \sim_0 x$ |
| 2. $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)}$ | 4. $\frac{\sqrt{x} - e^x + 2x^{22}}{\sqrt{x} \ln(x) - \sqrt{x} + x + 18} \sim_{+\infty} -\frac{e^x}{x}$ |

77 1. Démontrer l'équivalent suivant au voisinage de 0 : $\sqrt{x+\sqrt{x}} \sim_0 x^{\frac{1}{4}}$.
 2. Déterminer un équivalent de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

78 Soit $k \in \mathbb{R}$, k fixé. On définit la fonction f sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1, \\ -2x + k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k la fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

79 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\sin(ax)}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur \mathbb{R} en fonction des paramètres a et b .

80 Étudier la continuité en 0 de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left[\frac{1}{x} \right] & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

81 Démontrer que la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$ est prolongeable par continuité en 0.

82 Démontrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution dans l'intervalle indiqué.

1. $x^5 - x^4 + 1 = 0$ dans $I = [-1; 0]$, 2. $\tan x = x + 1$ dans $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

83 Démontrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution dans l'intervalle indiqué.

1. $e^x = 2 - x$ dans \mathbb{R} , 2. $\sin(x) + 1 = x$ dans $I =]\frac{\pi}{2}; \pi[$.

84 Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f([0; 1]) \subset [0; 1]$. Démontrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$.

Indication : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

2. Pour travailler seul

85 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Démontrer que la courbe représentant la fonction f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et étudier sa position par rapport à cette asymptote.

1. $f(x) = \frac{\ln(x) + 1 - x}{x + x^2}$ 3. $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{5x}$
 2. $f(x) = \frac{1}{1 + x^2} - x$ 4. $f(x) = -xe^{-x} + 1 - 3x$

86 Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + 1)$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)}$
 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)} - 1 \right)$ 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

87 1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2}$.

2. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-1; 1], \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

88 Étudier si les fonctions ci-dessous définies sur \mathbb{R}^* sont prolongeables par continuité en 0.

1. $g(x) = \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$ 3. $\varphi(x) = \frac{|\sin(x)|}{x}$
 2. $h(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 4. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

89 *Final 2012.* 1. Dresser le tableau de variations de la fonction

$$g :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 10\ln(1+x) + x^2 + 2x - 10.$$

2. Démontrer que g bijective de $]-1, +\infty[$ sur un ensemble J que l'on précisera.
 3. En déduire que l'équation $10\ln(1+x) + x^2 + 2x - 10 = 0$ admet une unique solution. On notera α cette solution dans la suite.
 4. On définit la fonction f par : $f(x) = \frac{x^2 - 10\ln(1+x)}{1+x}$. On désigne par \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère orthogonal du plan. Donner l'ensemble de définition \mathcal{D} de f .
 5. Déterminer les limites de f aux bornes de \mathcal{D} .
 6. Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet la droite Δ d'équation $y = x - 1$ pour asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Résolution d'équations à variable complexe

1. Les essentiels

90 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes d'inconnue z :

- | | |
|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $z^2 + z + 1 = 0,$ | 5. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0,$ |
| 2. $z^6 + z^3 + 1 = 0,$ | 6. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0,$ |
| 3. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0,$ où $\theta \in \mathbb{R},$ | 7. $2z^4 - (2 + i)z^2 + 1 - i = 0,$ |
| 4. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0,$ | 8. $z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$ |

91 Déterminer les racines

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. carrées de $11 + 4i\sqrt{3},$ | 3. sixièmes de $-27,$ |
| 2. cubiques de $8i,$ | 4. cubiques de $4(\sqrt{3} - i).$ |

92 On considère l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E) : Z^2 - 2iZ - 2 = 0.$$

- Résoudre (E).
- Soit z un nombre complexe écrit sous forme algébrique $z = a + ib$ avec a et b des nombres réels. Déterminer le module et un argument de e^z .
- En déduire les solutions de l'équation (S) ci-dessous d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(S) : e^{2z} - 2ie^z - 2 = 0.$$

93 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1. $e^z = 1,$ | 4. $e^z - 2e^{-z} + 2 = 0,$ |
| 2. $e^z = 2i,$ | 5. $e^{2z} = 1 + i\sqrt{3},$ |
| 3. $e^z = \sqrt{3} + 3i,$ | 6. $e^z = -1.$ |

94 Soit n un entier naturel supérieur à 2.

- Calculer la somme et le produit des n racines n -ièmes de l'unité.
- En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$

95 Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et ω une racine n -ième de l'unité telle que $\omega \neq 1$. On pose :

$$S = \sum_{k=1}^n k\omega^{k-1}.$$

En calculant $(1 - \omega)S,$ déterminer la valeur de $S.$

2. Pour approfondir

96 On pose $E = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et on considère l'application

$$f : E \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \mapsto \frac{2}{(z-1)^2}.$$

- Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8 - 6i.$
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = \frac{1}{4-3i}.$
- Démontrer que $f(E) = \mathbb{C}^*.$ On ne demande pas de calculer explicitement un antécédent de $\alpha \in \mathbb{C}^*$ par $f.$
- Soit θ un nombre réel tel que $0 < \theta < 2\pi.$
 - Démontrer que $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$
 - En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $f(e^{i\theta}).$
- On considère l'ensemble $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = 1\}.$ Démontrer que

$$f(\Delta \setminus \{1\}) =]-\infty, 0[.$$

97 On considère le nombre complexe $u = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right).$ On pose encore :

$$S = u + u^2 + u^4 \quad \text{et} \quad T = u^3 + u^5 + u^6.$$

1. (a) Simplifier u^7 .
 (b) Calculer la somme $1 + u + u^2 + \dots + u^6$.
 (c) Calculer le produit $uu^2u^3 \dots u^6$.
2. (a) Montrer que S et T sont deux nombres complexes conjugués.
 (b) Donner la valeur de $S + T$ et calculer $S \times T$.
 (c) Démontrer que la partie imaginaire de S est positive.
 (d) En déduire les valeurs exactes de S et T .
3. Calculer la somme :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

98 On définit l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y), \quad \text{où } z = x + iy \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Expliquer pourquoi la valeur 0 n'est pas prise par la fonction \exp .
2. Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue $z : \exp(z) = \alpha$.
3. En déduire que $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

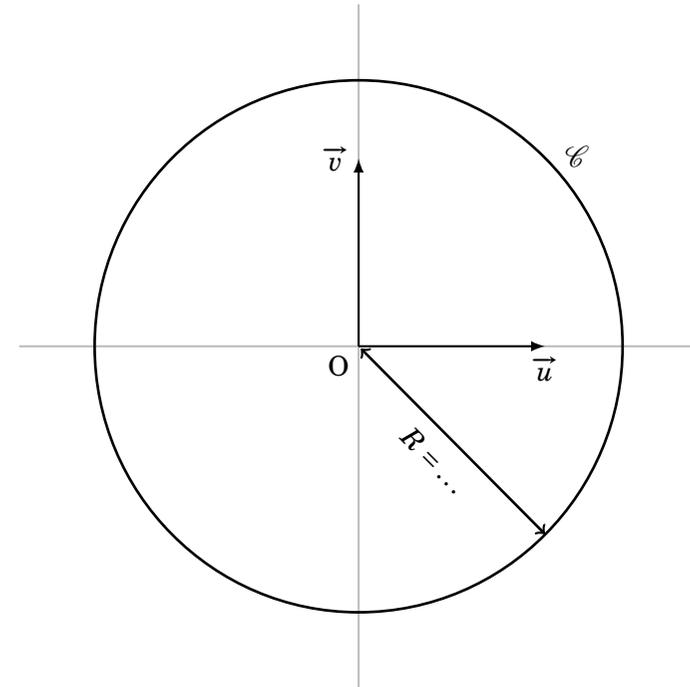
99 À quelle condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ le nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est-il réel ?

3. Pour travailler seul

100 *Final 2021* 1. Résoudre l'équation (E) ci-dessous d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$(E) : z^6 = 8.$$

2. Dans le plan ci-contre, représenter les solutions de (E) sur le cercle \mathcal{C} dont on indiquera la valeur du rayon R .



Dérivabilité

1. Les essentiels

101 Dans chacun des cas suivants :

- préciser sur quel ensemble la fonction f est dérivable,
- calculer sa dérivée f' ,
- déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

- | | |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto \ln(\ln x)$, où $a = e$ | 4. $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, où $a = 0$ |
| 2. $f : x \mapsto \sqrt{5 + \sin x}$, où $a = 0$ | 5. $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, où $a = 1$ |
| 3. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, où $a = 0$ | 6. $f : x \mapsto x^x$, où $a = 1$. |

102 Calculer la dérivée n -ième des fonctions suivantes :

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto e^{5x}$ | 3. $h : x \mapsto x e^x$ |
| 2. $g : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ | 4. $\varphi : x \mapsto \cos(2x)$. |

103 Étudier la dérivabilité des fonctions f, g, h et u définies par :

- $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$,
- $g(x) = \frac{|x| \sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$, si $x \neq 1$ et $g(1) = 1$,
- $h(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$,
- $u(x) = \frac{x}{1 + |x|}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

104 Déterminer deux réels a et b tels que la fonction f définie comme suit sur

$$\mathbb{R}^+ \text{ soit dérivable sur } \mathbb{R}^{+*} : f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0; 1], \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

105 La fonction φ est définie sur $[1; +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$.

1. Calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in [1; +\infty[$. Démontrer que φ est une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. On note φ^{-1} la bijection réciproque de φ . Calculer $(\varphi^{-1})'\left(\frac{e^2}{2}\right)$.

106 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x - 2$. Démontrer que f est bijective et calculer $(f^{-1})'(0)$.

107 En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, -x \leq \sin x \leq x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(1+x) < x$;
3. $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$.

108 Démontrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

2. Pour approfondir

109 On considère la fonction dérivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$.
(b) En déduire le sens de variation de f , ainsi que les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - (f(x))^2.$$

3. (a) Démontrer que f est bijective de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.

(b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner une expression simple de $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in J$.

110 1. À l'aide du théorème des accroissements finis, prouver que :

$$\forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[, 0 \leq \tan x - x \leq x(\tan x)^2.$$

2. On considère la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Étudier la parité de f .
- (b) Démontrer que f est continue sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- (c) Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
- (d) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D} =]-\frac{\pi}{2}; 0[\cup]0; \frac{\pi}{2}[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

111 *Final 2017.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

1. En remarquant que pour tout réel x , $f_n(x) = e^{-x} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \right)$, justifier que f_n est dérivable sur \mathbb{R} et démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}.$$

- 2. Démontrer que : $\forall x \in [0, 1], |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n!}$.
- 3. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à f_n sur l'intervalle $[0, 1]$.
- 4. On considère la suite de terme général $u_n = e f_n(1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Utiliser la question 3 pour démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
 - (b) En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

3. Pour travailler seul

- 112** 1. Démontrer que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.
- 2. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n}.$$

113 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

- 1. Démontrer que : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.
Indication : considérer la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.
- 2. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

114 *Final 2014.* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{1-x} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1. Démontrer que f est continue en 0.
- 2. Démontrer que f est dérivable à droite en 0 et donner $f'_d(0)$. On pourra utiliser l'équivalent suivant : $e^x - 1 - x \underset{(x \rightarrow 0)}{\sim} \frac{x^2}{2}$.
- 3. Démontrer que f est dérivable à gauche en 0 et donner $f'_g(0)$.
- 4. La fonction f est-elle dérivable en 0?
- 5. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 6. On désigne par \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - (a) Déterminer l'équation de l'asymptote Δ à \mathcal{C}_f au voisinage de $-\infty$.
 - (b) Déterminer les positions relatives de Δ et de \mathcal{C}_f sur l'intervalle $] -\infty, 0]$.
 - (c) Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en 1.

Polynômes

1. Les essentiels

115 Effectuer les divisions euclidiennes de

1. $X^4 + X^2 + X + 2$ par $X^2 - 3$,
2. $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$,
3. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$,
4. $4X^3 + 2iX^2$ par $X + i$.

116 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par :

1. $X + 3$,
2. $X^2 - 6X - 16$,
3. $(X - 1)^2(X - 2)$.

117 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par $(X - 1)^2$.

118 Soient a et b deux nombres réels et $P = aX^{25} + bX^{24} + 1$. Déterminer a et b pour que P soit divisible par $(X - 1)^2$.

119 Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles.

1. $4X^2 - X - 3$,
2. $X^3 - 8$,
3. $X^6 + 1$,
4. $X^7 - 1$,
5. $X^2 + X + 1$,
6. $X^4 + X^2 + 1$.

2. Pour approfondir

120 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que le polynôme $P = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans \mathbb{C} .

121 *Final 2018.* Le but de cet exercice est de prouver que la fonction \exp définie sur \mathbb{C} par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = e^{\operatorname{Re}(z)} [\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z))]$$

n'est pas polynomiale.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\exp(z) = 1$.
2. Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \exp(z)$. Quelles sont les racines du polynôme $Q = P - 1$?
3. Que peut-on dire d'un polynôme admettant une infinité de racines?
4. Démontrer que la fonction \exp n'est pas une fonction polynomiale.

122 1. Soit $P = X^2 - 4X + 5$. Décomposer le polynôme P en produits facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

2. On considère le polynôme suivant de $\mathbb{C}[X]$:

$$Q = X^3 - (1 + 2i)X^2 - 3X - 1 + 2i.$$

- (a) Démontrer que Q a une racine en commun avec P .
- (b) Effectuer la division euclidienne de Q par $X - \alpha$ où α est la racine commune à P et Q trouvée à la question précédente.
- (c) En déduire la décomposition de Q en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

3. Pour travailler seul

123 Soit n un entier, $n \geq 2$. On pose

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-2} + z^{n-1}.$$

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.
2. En déduire la factorisation de $P(z)$.
3. En calculant $P(1)$, prouver que : $\prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| = n$.
4. En déduire que : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

124 *Final 2016.* Soient n un entier naturel non nul, et P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré n .

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, |z - \alpha| \geq |\operatorname{Im}(z)|$.
2. On suppose dans cette question que P est scindé sur \mathbb{R} . En utilisant une factorisation de P , démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.
3. On prend dans cette question $P = 1 + X^3$.
 - (a) Donner une décomposition de P en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
 - (b) Trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| < |\operatorname{Im}(z_0)|^3$.
4. On suppose dans cette question que : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$. Démontrer que toutes les racines de P sont réelles. En déduire que P est scindé sur \mathbb{R} .
5. Énoncer clairement le résultat obtenu dans cet exercice.

125 *Final 2014.* On considère le polynôme à coefficients réels :

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1.$$

On admet que ce polynôme admet une racine complexe, non réelle et double notée α ($\alpha \notin \mathbb{R}$). Le but de cet exercice est de déterminer α .

1. Que peut-on dire de $P(\alpha)$ et de $P'(\alpha)$?
2. En déduire que $\bar{\alpha}$ est aussi une racine double de P .
3. Montrer que la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est donnée par :

$$P(X) = (X - \alpha)^2(X - \bar{\alpha})^2.$$

4. En déduire la factorisation de $P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Exprimer $P(0)$ en fonction de $|\alpha|$ et en déduire $|\alpha|$.
6. Développer l'expression donnée à la question 3 et déterminer α .

126 *Final 2019* Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère le polynôme :

$$P_n(X) = X^n - (X - 1)^n.$$

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P_n(z) = 0$ d'inconnue z . On exprimera les solutions en fonction des racines n -ièmes de l'unité.
2. Vérifier que, pour tout réel θ , $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.
3. Déterminer les écritures exponentielles des racines complexes du polynôme $P_n(X)$.

Fonctions trigonométriques réciproques

127 Compléter le tableau des valeurs remarquables ci-dessous.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\cos(\theta)$									
$\sin(\theta)$									

En déduire les valeurs de :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \arctan(1), \quad \arcsin(0).$$

128 Calculer :

$$\arccos(0), \quad \arccos(-1), \quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \arctan(\sqrt{3}), \quad \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

129 Soit $x \in [-1, 1]$.

- Développer les expressions ci-dessous puis les exprimer sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$\cos(2\arccos(x)), \quad \cos(2\arcsin(x)).$$

- Démontrer que :

$$(a) \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad (b) \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

130 Démontrer la formule ci-dessous :

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

131 Démontrer que pour tout réel x positif, $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$.

132 Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \quad g : x \mapsto \arcsin x.$$

- Déterminer les domaines de définition de f et de g .
- Déterminer les points où f et g sont dérivables et calculer leurs dérivées.
- En déduire une relation entre f et g .

133 On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

- Justifier que la fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .
- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

134 Résoudre l'équation suivante : $\arccos(x) = 2 \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

135 Démontrer les formules ci-dessous :

- $\forall x \in [-1, 1], \arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi$.
- $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

136 Démontrer la formule ci-dessous pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\arcsin(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

En déduire une formule analogue pour $x \in [-1, 0]$.

14

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
3. $\exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$
4. $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, m \leq f(x) \leq M$
5. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$.

16

1. $\exists x \in I, f(x) = 0$,
2. $\exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) \neq y$,
3. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, |f(x)| > M$,
4. $\exists x \in I, (f(x) > 0 \text{ et } x > 0)$.

18

1.
 - Négation : P et $\text{non}(Q)$.
 - Contraposée : $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$.
2. (a) Oui car la fonction sinus est 2π -périodique.
 - (b) $\sin(a) \neq \sin(b) \implies (\forall k \in \mathbb{Z}, a \neq b + 2k\pi)$.
 - (c) $(\exists k \in \mathbb{Z}, a = b + 2k\pi)$ et $\sin(a) \neq \sin(b)$.
 - (d) $\sin(a) = \sin(b) \implies (\exists k \in \mathbb{Z}, a = b + 2k\pi)$. Cette réciproque est fausse. En effet, en prenant $a = \pi/4$ et $b = \pi/4$ on a bien :

$$\sin(a) = \sin(b) \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}, a \neq b + 2k\pi.$$

19

1. $[\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C] \equiv \ll f \text{ est une fonction constante. } \gg$

2. Notons P l'assertion suivante :

$$P : [\forall x \in I, (f(x) = 0 \implies x = 0)].$$

Alors,

$$\begin{aligned} P &\equiv \ll \text{Si } f \text{ s'annule, alors c'est nécessairement en } 0 \gg \\ &\equiv [\forall x \in I, (x \neq 0 \implies f(x) \neq 0)] \\ &\equiv [\forall x \in I \setminus \{0\}, f(x) \neq 0] \\ &\equiv \ll f \text{ ne s'annule pas sur } I \setminus \{0\} \gg \end{aligned}$$

3. $[\forall x \in I, \forall y \in I, (x \leq y \implies f(x) \leq f(y))] \equiv \ll \text{La fonction } f \text{ est croissante. } \gg$
4. $[\forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) = f(x)] \equiv \ll \text{La fonction } f \text{ est } \pi\text{-périodique. } \gg$

20

1. $\ll \text{Si } A, \text{ alors } B. \gg \equiv [A \implies B]$.
2. $\ll \text{Pour que } A, \text{ il faut que } B. \gg \equiv [A \implies B]$.
3. $\ll \text{Pour que } A, \text{ il suffit que } B. \gg \equiv [B \implies A]$.
4. $\ll A \text{ est une condition suffisante pour } B. \gg \equiv [A \implies B]$.
5. $\ll A \text{ est une condition nécessaire pour } B. \gg \equiv [B \implies A]$.
6. $\ll A \text{ dès que } B. \gg \equiv [B \implies A]$.
7. $\ll A \text{ est faux si } B \text{ l'est. } \gg \equiv [\text{non}(B) \implies \text{non}(A)] \equiv [A \implies B]$.

- 21 On considère l'assertion

$$(P) : [\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \geq 5 \implies x \geq \sqrt{5})].$$

Alors :

$$\text{non}(P) \equiv [\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 \geq 5 \text{ et } x < \sqrt{5})].$$

Posons, par exemple, $x = -3$, alors $x^2 \geq 5$ et $x < \sqrt{5}$. Par conséquent, $\text{non}(P)$ est vraie. Autrement dit, l'assertion (P) est fausse.

- 22 On définit les assertions suivantes :

- D : « Je dors. »
- T : « Je travaille. »
- P : « Je parle. »
- R : « Je rêve. »

Alors :

1. « Je travaille et je rêve, mais je ne dors pas. » $\equiv (T \text{ et } R \text{ et non}(D))$.
2. « Quand je travaille, je ne parle pas. » $\equiv (T \implies \text{non}(P))$.
3. « Chaque fois que je travaille, je parle mais je ne dors pas. »
 $\equiv (T \implies (P \text{ et non}(D)))$.
4. « Si je travaille ou si je parle, alors je dors. » $\equiv ((T \text{ ou } P) \implies D)$.
5. « Il suffit que je travaille pour que je rêve. » $\equiv (T \implies R)$.
6. « Une condition nécessaire pour que je travaille et que je parle est que je rêve. » $\equiv ((T \text{ et } P) \implies R)$.
7. « Je travaille et je parle si et seulement si je rêve ou je dors. »
 $\equiv ((T \text{ et } P) \iff (R \text{ ou } D))$.
8. « Soit $\underbrace{\text{je travaille et je rêve}}_{A_1}$, soit $\underbrace{\text{si je dors alors je ne parle pas.}}_{A_2}$. »
 \equiv « Soit A_1 , soit A_2 . » où $\begin{cases} A_1 \equiv (T \text{ et } R) \\ A_2 \equiv (D \implies \text{non}(P)) \end{cases}$
 $\equiv [A_1 \text{ et non}(A_2)] \text{ ou } [A_2 \text{ et non}(A_1)]$
 $\equiv [(T \text{ et } R) \text{ et non}(D \implies \text{non}(P))] \text{ ou } [(D \implies \text{non}(P)) \text{ et non}(T \text{ et } R)]$
 $\equiv [(T \text{ et } R) \text{ et } (D \text{ et } P)] \text{ ou } [(D \implies \text{non}(P)) \text{ et } (\text{non}(T) \text{ ou } \text{non}(R))]$.

23 On admet les affirmations suivantes : « Si je vais au cinéma, alors je porte mes lunettes et je ne dors pas. Si je ne dors pas, alors je mange des pop corn. Je ne mange pas de pop corn. » On introduit alors les notations qui suivent :

- C : « Je vais au cinéma. »
- L : « Je porte mes lunettes. »
- D : « Je dors. »
- P : « Je mange des pop corn. »

On peut donc traduire les affirmations données sous forme symbolique :

- « Je ne mange pas de pop corn. » $\equiv \text{non}(P)$
- « Si je ne dors pas, alors je mange des pop corn. »
 $\equiv [\text{non}(D) \implies P]$
 $\equiv [\text{non}(P) \implies \text{non}(\text{non}(D))] \text{ par contraposée}$
 $\equiv [\text{non}(P) \implies D]$
- « Si je vais au cinéma, alors je porte mes lunettes et je ne dors pas. »
 $\equiv [C \implies (L \text{ et non}(D))]$
 $\equiv [\text{non}(L \text{ et non}(D)) \implies \text{non}(C)] \text{ par contraposée}$
 $\equiv [(\text{non}(L) \text{ ou } \text{non}(\text{non}(D))) \implies \text{non}(C)]$
 $\equiv [(\text{non}(L) \text{ ou } D) \implies \text{non}(C)]$

Ainsi les trois assertions

- $\text{non}(P)$
- $\text{non}(P) \implies D$
- $(\text{non}(L) \text{ ou } D) \implies \text{non}(C)$

sont vraies.

L'assertion $\text{non}(P)$ et l'implication $(\text{non}(P) \implies D)$ étant vraies, on en déduit que l'assertion D est vraie. D'où l'affirmation suivante : « Je dors. ». Puisque l'assertion D est vraie, alors l'assertion $(\text{non}(L) \text{ ou } D)$ l'est aussi. L'implication $[(\text{non}(L) \text{ ou } D) \implies \text{non}(C)]$ étant vraie, on en déduit que l'assertion $\text{non}(C)$ l'est également. Autrement dit, l'affirmation « Je ne vais au cinéma pas. » est vraie.

41 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrons l'égalité : $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Posons $y = x + n$. Il s'agit de démontrer que $\lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$. D'après la caractérisation de la partie entière, on sait que $\lfloor y \rfloor$ est l'unique entier $N \in \mathbb{Z}$

vérifiant :

$$N \leq y < N + 1.$$

Cherchons donc à encadrer y par deux entiers consécutifs. On sait (toujours d'après la caractérisation de la partie entière) que :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

En ajoutant n à cet encadrement, on en déduit :

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + 1 + n.$$

Autrement dit, en posant $N = \lfloor x \rfloor + n$, on obtient l'encadrement suivant, puisque $y = x + n$:

$$N \leq y < N + 1.$$

Or, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $N = \lfloor x \rfloor + n$. Donc $N \in \mathbb{Z}$. $\lfloor y \rfloor$ étant l'unique entier N vérifiant l'encadrement ci-dessus, on en déduit : $\lfloor y \rfloor = N$, i.e.

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

42 • On remarque que :

$$\frac{\pi}{12} = \frac{(4-3)\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}. \quad (\star) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}. \quad (\star\star) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

• Remarquons également l'égalité : $\frac{5\pi}{12} = \frac{(6-1)\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$. On en déduit :

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \\ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right). \end{cases}$$

Or, il est facile de vérifier (en s'aidant du cercle trigonométrique on en utilisant les formules de développement du sinus et du cosinus, voir la remarque à la fin de l'exercice pour une démonstration de ce résultat) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} & \text{d'après } (\star\star) \\ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} & \text{d'après } (\star) \\ \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}. \end{cases}$$

Remarque : pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + (-x)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) + \sin(-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 \times \cos(x) + \sin(-x) \times 0 \\ &= \cos(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + (-x)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x) \\ &= 0 \times \cos(-x) - 1 \times \sin(-x) \\ &= \sin(x). \end{aligned}$$

43 Soit $x \in [0, \pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété :

$$|\sin(nx)| \leq n \sin(x).$$

Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** Puisque $\sin(0x) = \sin(0) = 0$ et $0 \times \sin(x) = 0$, $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Démontrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\sin((n+1)x) = \sin(nx + x) = \sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx).$$

Donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\sin(x)\cos(nx)|.$$

Or,

$$\begin{aligned} |\sin(nx)\cos(x)| &= |\sin(nx)| |\cos(x)| \\ &\leq |\sin(nx)| \quad \text{car } -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ &\leq n \sin(x) \quad \text{d'après } P(n). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |\sin(x)\cos(nx)| &= |\sin(x)| |\cos(nx)| \\ &\leq |\sin(x)| \quad \text{car } -1 \leq \cos(nx) \leq 1. \end{aligned}$$

Or $x \in [0, \pi]$. Donc $\sin(x) \geq 0$. Par conséquent $|\sin(x)| = \sin(x)$ et

$$|\sin(x)\cos(nx)| \leq \sin(x).$$

Ainsi,

$$|\sin((n+1)x)| \leq n \sin(x) + \sin(x) = (n+1) \sin(x).$$

La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $P(0)$ est vraie et la propriété P est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leq n \sin(x).$$

44 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Simplifions $\sum_{k=n}^{2n} \sqrt{3^k}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n} \sqrt{3^k} &= \sum_{k=n}^{2n} (\sqrt{3})^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (\sqrt{3})^k - \sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt{3})^k \\ &= \frac{1 - (\sqrt{3})^{2n+1}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{1 - (\sqrt{3})^{(n-1)+1}}{1 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^{2n+1} - (\sqrt{3})^n}{\sqrt{3} - 1}. \end{aligned}$$

2. Simplifions $\sum_{k=0}^{2n} |k - n|$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} |k - n| &= \sum_{k=0}^n \underbrace{|k - n|}_{=-(k-n)} + \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{|k - n|}_{=k-n} \\ &\quad \text{car } k-n \leq 0 \qquad \text{car } k-n > 0 \\ &= \sum_{k=0}^n (-(k - n)) + \sum_{k=n+1}^{2n} (k - n) \\ &= -\sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n n + \sum_{k=n+1}^{2n} (k - n) \\ &= -\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \times n + \sum_{k=n+1}^{2n} (k - n) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=n+1}^{2n} (k - n). \end{aligned}$$

Posons $p = k - n$ dans la somme $\sum_{k=n+1}^{2n} (k - n)$:

$$\begin{cases} p = k - n \\ n + 1 \leq k \leq 2n \end{cases} \iff \begin{cases} p = k - n \\ 1 \leq k - n \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} p = k - n \\ 1 \leq p \leq n. \end{cases}$$

Alors

$$\sum_{k=n+1}^{2n} (k - n) = \sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2n} |k - n|} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{n(n+1)}.$$

3. Calculons $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+1)}{\prod_{k=1}^n k}.$$

Effectuons le changement de variable $p = k + 1$ dans le produit $\prod_{k=1}^n (k + 1)$:

$$\begin{cases} p = k + 1 \\ 1 \leq k \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} p = k + 1 \\ 2 \leq k + 1 \leq n + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = k + 1 \\ 2 \leq p \leq n + 1. \end{cases}$$

Alors

$$\prod_{k=1}^n (k + 1) = \prod_{p=2}^{n+1} p = \prod_{k=2}^{n+1} k.$$

Ainsi

$$\boxed{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{\left(\prod_{k=2}^n k\right) \times (n+1)}{1 \times \left(\prod_{k=2}^n k\right)} = \boxed{n+1}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\prod_{j=1}^n x^j = x^{\sum_{j=1}^n j} = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$ car $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$.

5. On suppose que $n \geq 2$. Simplifions $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^n (k^2 - 1)}{\prod_{k=2}^n k^2} = \frac{\prod_{k=2}^n ((k-1)(k+1))}{\prod_{k=2}^n k^2}.$$

D'où

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\left(\prod_{k=2}^n (k-1)\right) \left(\prod_{k=2}^n (k+1)\right)}{\left(\prod_{k=2}^n k\right)^2} = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1)}{\prod_{k=2}^n k} \times \frac{\prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n k}.$$

Effectuons le changement de variable $p = k - 1$ dans $\prod_{k=2}^n (k - 1)$:

$$\begin{cases} p = k - 1 \\ 2 \leq k \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} p = k - 1 \\ 1 \leq k - 1 \leq n - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = k - 1 \\ 1 \leq p \leq n - 1. \end{cases}$$

D'où

$$P_n = S_n = \frac{4^n}{2}.$$

46

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$a_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}a_n.$$

Donc, la suite $(a_n)_n$ est géométrique de raison $1/2$ et de premier terme $a_0 = 3/2$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2^{n+1}}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+1} = 2^{n+1}u_{n+1} = 2^{n+1}\left(a_n + \frac{1}{2}u_n\right) = 2^{n+1}\left(\frac{3}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \times \frac{b_n}{2^n}\right) = 3 + b_n.$$

Ainsi, la suite (b_n) est arithmétique de premier terme $b_0 = -1$ et de raison

3. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = -1 + 3n.$$

3. D'après les questions précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{-1 + 3n}{2^n}.$$

47

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) : u_n > 0.$$

Démontrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n par récurrence.

- Initialisation. Il est clair que $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 1/3 > 0$.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 3u_n} > 0.$$

Donc, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1 + 3u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 3 \times \frac{u_n}{u_n} = v_n + 3.$$

On en déduit que la suite $(v_n)_n$ est arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 3. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 3 + 3n.$$

(b) D'après ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{3 + 3n}.$$

48

1. Démontrons que les suites sont adjacentes.

- Monotonie de $(u_n)_n$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \right) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est croissante.

- Monotonie de $(v_n)_n$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{n(n+1)}{(n+1)!n(n+1)} + \frac{n}{(n+1)!n(n+1)} - \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)!n(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)!n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{(n+1)!n(n+1)} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

- Limite de la différence :

$$u_n - v_n = -\frac{1}{n \times n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi, les deux suites sont bien adjacentes et convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$.

2. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Ainsi, on obtient un encadrement de ℓ à 10^{-5} près dès que $v_n - u_n \leq 10^{-5}$, ce qui est le cas à partir de $n = 7$. Finalement :

$$\ell \in [u_7, v_7] \simeq [2, 71827; 2.71828].$$

49

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n &= s_{2n} \\ v_n &= s_{2n+1} \end{cases}$$

et démontrons que ces suites sont adjacentes.

- Monotonie de $(u_n)_n$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n &= s_{2n+2} - s_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2+1}}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $(u_n)_n$ est croissante.

- On démontre de la même manière que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} \leq 0,$$

et donc que $(v_n)_n$ est décroissante.

- Enfin,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a donc bien démontré que les deux suites sont adjacentes : d'après le cours elles convergent vers la même limite ℓ .

2. D'après le cours, si les deux suites extraites $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite ℓ , alors la suite $(s_n)_n$ converge vers ℓ .

51 On a :

1. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \rightarrow +\infty$
2. $u_n \sim \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3}$

3. $e^{1-n} \rightarrow 0$ (par composition de limites)
4. $u_n \sim -n^2 \rightarrow -\infty$
5. $u_n \sim n \rightarrow +\infty$ (par croissances comparées)
6. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \geq n - 5,$$

donc, d'après le théorème de comparaison, $u_n \rightarrow \infty$.

7. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1},$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, $u_n \rightarrow 0$.

8. On multiplie et on divise par la forme conjuguée correspondante pour lever l'indétermination :

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

53

- Démontrons que $n^3 + 3n \sim n^3$. Il s'agit de vérifier que :

$$\frac{n^3 + 3n}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Or :

$$\frac{n^3 + 3n}{n^3} = \frac{n^3}{n^3} + \frac{3n}{n^3} = 1 + \frac{3}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0$. D'où le résultat.

- Par définition,

$$n - \ln(n) \sim n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \ln(n)}{n} = 1.$$

Or,

$$\frac{n - \ln(n)}{n} = 1 - \frac{\ln(n)}{n},$$

et d'après le théorème des croissances comparées $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. On a donc bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \ln(n)}{n} = 1.$$

D'où

$$n - \ln(n) \sim n.$$

- Par définition,

$$3 \ln(n) \sim \ln(n) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(n)}{\ln(n)} = 1.$$

Or,

$$\frac{3 \ln(n)}{\ln(n)} = 3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3 \neq 1.$$

Par conséquent,

$$3 \ln(n) \not\sim \ln(n).$$

54

- Par définition,

$$2n^2 - n \sim 2n^2 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - n}{2n^2} = 1.$$

Or :

$$\frac{2n^2 - n}{2n^2} = \frac{2n^2}{2n^2} - \frac{n}{2n^2} = 1 - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$. D'où

$$2n^2 - n \sim 2n^2.$$

- Démontrons que $\exp(2n) + n^3 + n! \sim n!$. Il s'agit de vérifier que :

$$\frac{\exp(2n) + n^3 + n!}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Or,

$$\frac{\exp(2n) + n^3 + n!}{n!} = \frac{(e^2)^n}{n!} + \frac{n^3}{n!} + 1.$$

D'après le théorème des croissances comparées,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n!} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^2)^n}{n!} = 0 \quad \text{car } e^2 > 1. \end{cases}$$

On a donc bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\exp(2n) + n^3 + n!}{n!} = 1,$$

Autrement dit,

$$\exp(2n) + n^3 + n! \sim n!.$$

• Par définition,

$$2n^2 \sim n^2 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 1.$$

Or,

$$\frac{2n^2}{n^2} = 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^2} \neq 1.$$

Par conséquent,

$$2n^2 \not\sim n^2.$$

55

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0.$$

On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

• Initialisation. On a bien $0 \leq u_0 \leq 1$ car $u_0 = \frac{1}{2}$.

• Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que :

$$0 \leq u_n \leq 1.$$

Or,

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 &\implies -0 \geq -u_n \geq -1 \\ &\implies 0 \leq 1 - u_n \leq 1 \\ &\implies 0 \leq u_n(1 - u_n) \leq u_n \quad \text{car } u_n \geq 0 \\ &\implies 0 \leq u_{n+1} \leq 1. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1.$$

• Conclusion. La propriété $0 \leq u_n \leq 1$ étant initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

3. La suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée. Elle est donc convergente. Notons sa limite ℓ . Par définition de $(u_n)_n$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

Par passage à la limite dans cette égalité, on en déduit que ℓ vérifie :

$$\ell = \ell - \ell^2,$$

soit après calculs $\ell = 0$.

56

1. Démontrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Pour tout entier n , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{1 + u_n} - u_n \\ &= \frac{(\sqrt{1 + u_n} - u_n)(\sqrt{1 + u_n} + u_n)}{\sqrt{1 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{(1 + u_n) - u_n^2}{\sqrt{1 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n + 1}{\sqrt{1 + u_n} + u_n}. \quad (\star) \end{aligned}$$

- Commençons par remarquer que le dénominateur est de signe strictement positif. En effet, $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq 0$ car une racine carrée est toujours positive. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n \geq 0 \implies 1 + u_n \geq 1 \implies \sqrt{1 + u_n} \geq \sqrt{1} = 1,$$

car la fonction racine carrée est croissante. On en déduit finalement :

$$\sqrt{1 + u_n} + u_n \geq 1 + 0 > 0.$$

- Il reste à déterminer le signe du numérateur $-u_n^2 + u_n + 1$. Déterminons pour cela le signe du polynôme $P(x) = -x^2 + x + 1$. Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$. Ce polynôme admet donc deux racines qui sont : $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$, $P(x) \geq 0$. En particulier, puisque $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right], \quad P(x) \geq 0.$$

Pour démontrer que $(u_n)_n$ est croissante, il reste à démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P(u_n) \geq 0$. Ainsi, il suffit de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$. On a déjà démontré ci-dessus que $(u_n)_n$ est à termes positifs. Démontrons par récurrence sur n que $(u_n)_n$ est majorée par $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

- ★ Initialisation. $u_0 = 1$ donc on a bien $u_0 \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
- ★ Hérité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Puisque la fonction racine carrée est croissante, on en déduit :

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \leq \sqrt{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Or, on peut vérifier facilement que $\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. En effet, en étudiant la différence entre ces deux nombres on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} &= \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}\right)}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}\right)^2}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}} \\ &= \frac{\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_{n+1} \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

- ★ D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$, et donc $-u_n^2 + u_n + 1 = P(u_n) \geq 0$. D'après (★), on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

2. La suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée. Elle est donc convergente. Notons sa limite ℓ . Par définition de $(u_n)_n$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Par passage à la limite dans cette égalité, on en déduit que ℓ vérifie :

$$\ell = \sqrt{1 + \ell},$$

et donc

$$\ell^2 = 1 + \ell.$$

Autrement dit,

$$P(\ell) = 0.$$

D'après la question précédente, les racines de P sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Par conséquent, $\ell = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Par conséquent, $0 \leq \ell \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Finalement, on en déduit que :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

57 Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique telle que :

$$u_0 = 90 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = 150.$$

Déterminons la raison q de $(u_n)_n$. Par définition d'une suite géométrique on sait que : $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. De plus, pour tout entier naturel k , $u_k = u_0 q^k$. Donc :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (u_0 q^k) = u_0 \sum_{k=0}^n q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = 150$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 150.$$

Or, $u_0 = 90$. On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 90 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 150,$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-q^{n+1}) = \frac{150}{90} (1-q) = \frac{5}{3} (1-q).$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 1 - \frac{5}{3} (1-q). \quad (\star)$$

D'autre part, on sait que :

- si $q \leq -1$, alors q^n n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$, donc q^{n+1} n'a pas de limite ;
- si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = +\infty$.

Puisque, d'après (\star) , q^{n+1} admet une limite finie, alors on a nécessairement :

$$-1 < q < 1.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0. \quad (\star\star)$$

En utilisant (\star) et $(\star\star)$ et par unicité de la limite, on obtient :

$$1 - \frac{5}{3} (1-q) = 0.$$

Or,

$$1 - \frac{5}{3} (1-q) = 0 \iff \frac{5}{3} (1-q) = 1$$

$$\iff 1-q = \frac{3}{5}$$

$$\iff q = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

On en déduit donc que la raison de la suite $(u_n)_n$ est $q = \frac{2}{5}$.

59 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} -1 < u_0 < 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n + 4}. \end{cases}$$

- (a) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$.

1ère méthode :

- **Initialisation :** Par hypothèse $-1 < u_0 < 0$.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $-1 < u_n < 0$. Démontrons que $-1 < u_{n+1} < 0$. D'une part,

$$-1 < u_n < 0 \implies -3 < u_n - 2 < -2 \implies 2 < 2 - u_n < 3$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} -1 < u_n < 0 &\implies 3 < u_n + 4 < 4 \\ &\implies \frac{1}{4} < \frac{1}{u_n + 4} < \frac{1}{3} \quad \text{car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement} \\ &\hspace{10em} \text{décroissante sur }]0, +\infty[\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \boxed{-1 < u_n < 0} &\implies \begin{cases} 0 < 2 < 2 - u_n < 3 \\ 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{u_n + 4} < \frac{1}{3} \end{cases} \\ &\implies 2 \times \frac{1}{4} < (2 - u_n) \times \frac{1}{u_n + 4} < 3 \times \frac{1}{3} \\ &\implies \frac{1}{2} < \frac{2 - u_n}{u_n + 4} < 1 \\ &\implies \frac{1}{2} < -u_{n+1} < 1 \\ &\implies -1 < u_{n+1} < -\frac{1}{2} \\ &\implies \boxed{-1 < u_{n+1} < 0}. \end{aligned}$$

La propriété $-1 < u_n < 0$ est donc héréditaire.

- **Conclusion** : par principe de récurrence, on en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n < 0}.$$

2ème méthode : étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x-2}{x+4}$.

La fonction $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [-1, 0], f(x) = \frac{x-2}{x+4},$$

est dérivable sur $[-1, 0]$ comme quotient de fonctions polynomiales, et :

$$\forall x \in [-1, 0], f'(x) = \frac{1 \times (x+4) - (x-2) \times 1}{(x+4)^2} = \frac{6}{(x+4)^2}.$$

On remarque que :

$$\forall x \in [-1, 0], f'(x) > 0.$$

Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $[-1, 0]$.
Donc,

$$\forall x \in]-1, 0[, f(-1) < f(x) < f(0).$$

Or par définition de $f : f(-1) = \frac{-3}{3} = -1$ et $f(0) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} < 0$. On en déduit :

$$\forall x \in]-1, 0[, -1 < f(x) < 0. \quad (\star)$$

Démontrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n , $-1 < u_n < 0$.

- **Initialisation** : Par hypothèse $-1 < u_0 < 0$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $-1 < u_n < 0$. Démontrons que $-1 < u_{n+1} < 0$. Par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in]-1, 0[$. D'après (\star) , on en déduit $-1 < f(u_n) < 0$, i.e. $-1 < u_{n+1} < 0$. La propriété $-1 < u_n < 0$ est donc héréditaire.

- **Conclusion** : par principe de récurrence, on en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n < 0}.$$

- (b) Étudions la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n - 2}{u_n + 4} - u_n \\ &= \frac{u_n - 2 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} \\ &= \frac{-u_n^2 - 3u_n - 2}{u_n + 4} \\ &= -\frac{u_n^2 + 3u_n + 2}{u_n + 4}. \end{aligned}$$

En calculant le discriminant du polynôme $x^2 + 3x + 2$, il est facile de vérifier que ce polynôme se factorise

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1).$$

Dressons alors le tableau de signes du polynôme $x^2 + 3x + 2$:

x	-2		-1	
$x + 2$	-	0	+	+
$x + 1$	-		-	0
$x^2 + 3x + 2$	+	0	-	0

On remarque que :

$$\forall x \in]-1, 0[, x^2 + 3x + 2 > 0.$$

D'après la question 1, $u_n \in]-1, 0[$. On en déduit : $u_n^2 + 3u_n + 2 > 0$.
D'autre part, $u_n + 4 > -1 + 4 > 0$. Ainsi,

$$\frac{u_n^2 + 3u_n + 2}{u_n + 4} > 0,$$

i.e.

$$u_{n+1} - u_n < 0.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n.$$

Cela signifie que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. D'après la question 1(b), la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. D'après la question 1(a), elle est minorée (par -1). On en déduit, grâce au théorème de convergence monotone, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. On sait (voir question 1(a)) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n < 0.$$

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on peut passer à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans cet encadrement. On obtient alors :

$$-1 \leq \ell \leq 0.$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - 2}{u_n + 4} = \frac{\ell - 2}{\ell + 4}.$$

D'autre part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Par unicité de la limite de u_{n+1} , on obtient :

$$\frac{\ell - 2}{\ell + 4} = \ell.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\ell - 2}{\ell + 4} = \ell &\iff (\ell - 2) = \ell(\ell + 4) \\ &\iff \ell^2 + 3\ell + 2 = 0 \\ &\iff (\ell + 2)(\ell + 1) \quad \text{d'après la question 1(b)} \\ &\iff \ell = -2 \text{ ou } \ell = -1 \\ &\iff \ell = -1 \quad \text{car } -1 \leq \ell \leq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1}.$$

60

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissante telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_n = S_{2n}, \\ v_n = S_{2n+1}. \end{cases}$$

(a) Les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, si l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux tend vers 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{2(n+1)} - S_{2n} \\ &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\ &= \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k a_k \\ &= -a_{2n+1} + a_{2n+2}. \end{aligned}$$

Or

$$a_{2n+2} \leq a_{2n+1},$$

car la suite (a_n) est décroissante. Donc, $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

- De la même manière, pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} \\ &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \\ &= \sum_{k=2n+2}^{2n+3} (-1)^k a_k \\ &= (-1)^2 a_{2n+2} + (-1)^3 a_{2n+3} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ &\geq 0 \quad \text{car } (a_n)_n \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1}$$

ce qui signifie que $(v_n)_n$ est croissante.

- Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= S_{2n+1} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\ &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\ &= -a_{2n+1}. \end{aligned}$$

Or, la suite $(a_n)_n$ converge vers 0 et $(a_{2n+1})_n$ est une suite extraite de $(a_n)_n$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0}.$$

On en déduit que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

(b) Comme (u_n) et $(v_n)_n$ sont adjacentes, elles convergent et admettent la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Autrement dit, la sous-suite $(S_{2n})_n$ des termes d'indices pairs de $(S_n)_n$ et la sous-suite $(S_{2n+1})_n$ des termes d'indices impairs de $(S_n)_n$ ont la même limite ℓ . D'après le cours, on peut en conclure que $(S_n)_n$ converge vers ℓ .

2. Soit $(b_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \sin(b_n) + [b_n] + 1. \end{cases}$$

(a) Notons, pour tout n entier naturel,

$$P(n) : -1 \leq b_n < 0.$$

Démontrons, par récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** Comme $b_0 = -1/2$, $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, i.e.

$$-1 \leq b_n < 0.$$

Alors, $[b_n] = -1$. Ainsi :

$$b_{n+1} = \sin(b_n) + [b_n] + 1 = \sin(b_n).$$

D'autre part, d'après l'énoncé :

$$\forall x \in [-1, 0[, \quad \sin(x) > x.$$

Donc, puisque $-1 \leq b_n < 0$, on a :

$$\sin(b_n) > b_n \geq -1.$$

Ainsi,

$$b_{n+1} \geq -1.$$

De plus, $b_n \in [-1, 0[$. Donc $b_n \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$. Or,

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[, \quad \sin(x) < 0.$$

Ainsi,

$$\sin(b_n) < 0,$$

i.e.

$$b_{n+1} < 0.$$

Par conséquent,

$$-1 \leq b_{n+1} < 0,$$

et $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** $P(0)$ étant vraie et P étant héréditaire, on déduit du principe de récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq b_n < 0}.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $b_n \in [-1, 0[$. Par conséquent, $[b_n] = -1$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n)}.$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$b_{n+1} - b_n = \sin(b_n) - b_n.$$

D'après l'indication donnée dans l'énoncé, $\sin(b_n) - b_n > 0$ puisque $b_n \in [-1, 0[$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} - b_n > 0.$$

$\boxed{\text{La suite } (b_n)_n \text{ est donc (strictement) croissante}}.$

- (d) D'après le théorème de convergence monotone, $(b_n)_n$ étant croissante et majorée (par 0), elle converge. Notons ℓ sa limite. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \ell.$$

D'autre part, d'après la relation trouvée à la question 2(b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n).$$

Or, par continuité de la fonction sinus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(b_n) = \sin(\ell).$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \sin(\ell).$$

Par unicité de la limite, on en déduit :

$$\sin(\ell) = \ell.$$

Or, d'après l'indication de l'énoncé, cette équation n'a pas de solution sur $[-1, 0[$ car

$$\forall x \in [-1, 0[, \quad \sin(x) > x.$$

De plus, d'après la question 2(a), on sait que la limite de $(b_n)_n$ est un élément de $[-1, 0]$ car

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq b_n < 0.$$

Par conséquent, $\ell = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0}.$$

- (e) Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -b_n.$$

Alors, d'après les questions 2(a) et 2(c), $(a_n)_n$ est une suite de nombres positifs qui est décroissante et qui vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. D'après la question 1, on en déduit que la suite $(S_n)_n$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$$

converge. Or :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (-b_k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k.$$

Donc la suite de terme général $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k$ converge.

70

1. On considère l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 2n.$$

Par définition, f est bijective si et seulement si tout élément de \mathbb{N} admet un unique antécédent par f .

On remarque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ est un entier pair. Par conséquent, si on considère un élément y de \mathbb{N} qui est impair alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \neq y.$$

Ainsi, les éléments de \mathbb{N} qui sont des entiers impairs n'ont pas d'antécédent par f . En en déduit que f n'est pas bijective.

2. Soit $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque 1 est un entier impair, alors $g(1) = 1$. Et, puisque 2 est un entier pair, alors on a : $g(2) = \frac{2}{2} = 1$. Par conséquent l'élément 1 de \mathbb{N} admet au moins deux antécédents par g : 1 et 2. On en déduit que g n'est pas bijective.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $(g \circ f)(n)$.

Par définition de $g \circ f$, on sait que : $(g \circ f)(n) = g(f(n))$.

Or, $f(n) = 2n$. Donc $f(n)$ est pair. Par définition de g , on en déduit que :

$$g(f(n)) = \frac{f(n)}{2} = \frac{2n}{2} = n.$$

Ainsi, $(g \circ f)(n) = n$.

4. • D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (g \circ f)(n) = n.$$

Donc : $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

Démontrons, en raisonnant par l'absurde, que $f \circ g \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$.

Si on avait $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$, alors puisqu'on a $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$, on en déduirait que f est bijective et que $f^{-1} = g$ (voir le théorème 5.66 du cours).

Or, on sait d'après la question 1 que f n'est pas bijective. Par conséquent, l'assertion $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$ est fautive. Autrement dit,

$$f \circ g \neq \text{id}_{\mathbb{N}}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)).$$

Or,

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$(f \circ g)(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(n) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Or, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f(p) = 2p$. Par conséquent,

$$(f \circ g)(n) = \begin{cases} 2 \times \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 \times n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

71

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (2x - y, x + y)$.

Par définition, f est bijective si et seulement si :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2, (a, b) = f(x, y).$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résolvons l'équation $(a, b) = f(x, y)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (a, b) = f(x, y) &\iff (a, b) = (2x - y, x + y) \\ &\iff \begin{cases} 2x - y = a & L_1 \\ x + y = b & L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y = b & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x - y = a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y = b \\ -3y = a - 2b & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = b - \frac{2b - a}{3} = \frac{a + b}{3} \\ y = \frac{2b - a}{3} \end{cases} \\ &\iff (x, y) = \left(\frac{a + b}{3}, \frac{2b - a}{3} \right). \end{aligned}$$

On remarque que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $(a, b) = f(x, y)$ admet une unique solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$(x, y) = \left(\frac{a + b}{3}, \frac{2b - a}{3} \right).$$

Donc tout élément (a, b) de \mathbb{R}^2 admet un unique antécédent par f qui est :

$$\left(\frac{a + b}{3}, \frac{2b - a}{3} \right).$$

Par conséquent, f est bijective et sa bijection réciproque est l'application :

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(a, b) \mapsto \left(\frac{a + b}{3}, \frac{2b - a}{3} \right).$$

- L'application suivante est bijective

$$g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \sqrt{2z} + iz.$$

si et seulement si :

$$\forall \xi \in \mathbb{C}, \exists! z \in \mathbb{C}, \xi = g(z).$$

Soit $\xi \in \mathbb{C}$. Résolvons l'équation $\xi = g(z)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Écrivons ξ et z sous forme algébrique : $\xi = a + ib$ et $z = x + iy$ avec a, b, x et y des

nombre réels.

$$\begin{aligned} \xi = g(z) &\iff \xi = \sqrt{2} \bar{z} + iz \\ &\iff a + ib = \sqrt{2} \overline{(x + iy)} + i(x + iy) \\ &\iff a + ib = \sqrt{2}(x - iy) + i(x + iy) \\ &\iff a + ib = \sqrt{2}(x - iy) + ix - y \\ &\iff a + ib = (\sqrt{2}x - y) + i(x - \sqrt{2}y) \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x - y = a \\ x - \sqrt{2}y = b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{par identification des parties réelles} \\ \text{et imaginaires} \end{array} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{2}x - a \\ x - \sqrt{2}y = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{2}x - a \\ x - \sqrt{2}(\sqrt{2}x - a) = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{2}x - a \\ x - 2x + \sqrt{2}a = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{2}x - a \\ x = \sqrt{2}a - b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{2}(\sqrt{2}a - b) - a = a - \sqrt{2}b \\ x = \sqrt{2}a - b \end{cases} \\ &\iff x + iy = (\sqrt{2}a - b) + i(a - \sqrt{2}b) \\ &\iff z = (\sqrt{2}a - b) + i(a - \sqrt{2}b) \\ &\iff z = \sqrt{2}(a - ib) + ia - b = \sqrt{2}(a - ib) + i(a + ib) \\ &\iff z = \sqrt{2} \bar{\xi} + i\xi. \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation $\xi = g(z)$ admet une unique solution $z \in \mathbb{C}$ donnée par $z = \sqrt{2} \bar{\xi} + i\xi$. Par conséquent, tout élément ξ de \mathbb{C} admet un unique antécédent par g qui est : $\sqrt{2} \bar{\xi} + i\xi$. Ainsi, g est bijective et sa

bijection réciproque est l'application définie par :

$$g^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ \xi \mapsto \sqrt{2} \bar{\xi} + i\xi.$$

Notons que pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, on a :

$$g^{-1}(g(\xi)) = \sqrt{2} \bar{\xi} + i\xi = g(\xi).$$

Par conséquent, $g^{-1} = g$.

- On considère l'application φ ci-dessous,

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ X \mapsto \{1; 2; 3\} \cup X.$$

On remarque, par exemple, que :

$$\begin{cases} \varphi(\{1\}) = \{1; 2; 3\} \cup \{1\} = \{1; 2; 3\} \\ \varphi(\{2\}) = \{1; 2; 3\} \cup \{2\} = \{1; 2; 3\}. \end{cases}$$

Ainsi, $\{1\}$ et $\{2\}$ sont deux antécédents (distincts) de $\{1; 2; 3\}$. Par conséquent, $\{1; 2; 3\}$ est un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui admet au moins deux antécédents par φ . Donc φ n'est pas bijective.

Remarque :

- On peut également construire d'autres éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui admettent au moins deux antécédents par φ .
- Par ailleurs, il existe également des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui n'admettent aucun antécédent par φ . En effet, pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a : $\{1; 2; 3\} \subset \{1; 2; 3\} \cup X$. Donc pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a : $\{1; 2; 3\} \subset \varphi(X)$. On en déduit, par exemple, que pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\emptyset \neq \varphi(X)$ car l'ensemble $\{1; 2; 3\}$ n'est pas inclus dans l'ensemble \emptyset . Par conséquent l'élément \emptyset de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'admet pas d'antécédent par φ . Ce qui permet d'affirmer que φ n'est pas bijective.

72 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Considérons un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque et calculons $(f \circ f)(n)$. Par définition de la composée de deux fonctions, on a :

$$(f \circ f)(n) = f(f(n)).$$

- Supposons que n est pair. Alors :
 - $f(n) = n + 1$ donc $(f \circ f)(n) = f(n + 1)$,
 - $n + 1$ est impair donc $f(n + 1) = (n + 1) - 1 = n$.
 Ainsi, $(f \circ f)(n) = n$.
- Supposons maintenant que n est impair. Alors :
 - $f(n) = n - 1$ donc $(f \circ f)(n) = f(n - 1)$,
 - $n - 1$ est pair donc $f(n - 1) = (n - 1) + 1 = n$.
 Ainsi, $(f \circ f)(n) = n$.

On a donc, que n soit pair ou impair : $(f \circ f)(n) = n$.

D'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (f \circ f)(n) = n}.$$

On en déduit que $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$. Or d'après le cours, si il existe une application $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$ et $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Puisque $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$, on déduit de ce résultat que f est bijective et que $f^{-1} = f$.

86

1. Pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a : $e^x - x^2 + 1 = e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$.

Or,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, d'après le théorème des croissances comparées.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$.

Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 + 1) = +\infty}$.

2. Pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)} - 1 \right) &= x \frac{\left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)} - 1\right)\left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1} \\ &= x \frac{\left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)}\right)^2 - 1^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1} \\ &= x \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right) - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1} \\ &= x \frac{\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right) - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1} \\ &= \frac{5 + \frac{6}{x}}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1}. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc, d'après les opérations sur les limites de fonctions,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)} - 1 \right) = \frac{5 + 0}{\sqrt{(1+0)(1+0)} + 1} = \frac{5}{2}}.$$

3. Pour tout x au voisinage de 0 tel que $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} = \frac{\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2x}{\frac{\sin(5x)}{5x} \times 5x} = \frac{\frac{\sin(2x)}{2x}}{\frac{\sin(5x)}{5x}} \times \frac{2}{5}.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (5x) = 0$.

Or, d'après les équivalents usuels en 0, on sait que :

$$\sin(y) \sim_0 y$$

i.e.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

On en déduit, par composition de limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = 1.$$

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} = \frac{1}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$.

4. Soit x au voisinage de 1 tel que $x \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 D'après la factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$ pour a et b deux nombres réels ou le développement de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$ pour $q \neq 1$, on sait que :

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}.$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

87

1. Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2}$, forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

Soit x au voisinage de 0 tel que $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} &= \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} \times \frac{\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2})}{\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2})} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (1 + \frac{x}{2})^2}{x^2 (\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2}))} \\ &= \frac{(1+x) - (1 + x + \frac{x^2}{4})}{x^2 (\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2}))} \\ &= -\frac{1}{4(\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2}))} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4(1+1)} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} = -\frac{1}{8}$.

2. Posons alors, pour tout $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} + \frac{1}{8},$$

de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Prolongeons la fonction ε par continuité en 0 en posant : $\varepsilon(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x)$
 i.e. $\varepsilon(0) = 0$. Par définition de la fonction ε on a, pour tout $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) = \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} + \frac{1}{8} &\iff \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} = -\frac{1}{8} + \varepsilon(x) \\ &\iff \sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2}) = -\frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x) \\ &\iff \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

Notons que cette dernière formule est encore vraie pour $x = 0$. Par conséquent,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x).$$

88

1. Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R}^* par :

$$g(x) = \frac{(1+x)^3 - 1}{x}.$$

Par définition, g est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si g admet une limite finie en 0. Or, pour tout x au voisinage de 0 tel que $x \neq 0$, on peut écrire, d'après la formule du binôme et le triangle de Pascal :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\binom{3}{0} 1^0 x^{3-0} + \binom{3}{1} 1^1 x^{3-1} + \binom{3}{2} 1^2 x^{3-2} + \binom{3}{3} 1^3 x^{3-3} - 1}{x} \\ &= \frac{(1 + 3x^2 + 3x + 1) - 1}{x} = \frac{3x^2 + 3x}{x} = 3x + 3. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (3x + 3) = \boxed{3}.$$

La fonction g admet une limite finie en 0.

Ainsi, g est prolongeable par continuité en 0, en posant $g(0) = 3$.

2. Étudions si la fonction h définie sur \mathbb{R}^* par

$$h(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

est prolongeable par continuité en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On sait que $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, i.e. $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1$. Par conséquent,

$$|h(x)| = |\sin(x)| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |\sin(x)|.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad 0 \leq |h(x)| \leq |\sin(x)|.$$

Or, on sait par continuité de la fonction $x \mapsto |\sin(x)|$ que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\sin(x)| = |\sin(0)| = 0.$$

On déduit donc du théorème des gendarmes que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0}.$$

La fonction h admet donc une limite finie en 0 (qui vaut 0).

Autrement dit, la fonction h est prolongeable par continuité en 0, en posant $h(0) = 0$.

3. Considérons la fonction φ définie sur \mathbb{R}^* par :

$$\varphi(x) = \frac{|\sin(x)|}{x}.$$

D'après le cours, φ est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si φ admet une limite finie en 0. Rappelons que d'après les équivalents usuels en 0 :

$$\sin(x) \sim_0 x \quad \text{i.e.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Soit x un nombre réel non nul

- Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, alors $\sin(x) > 0$, donc $\varphi(x) = \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. C'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1.$$

- Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, alors $\sin(x) < 0$ et donc : $\varphi(x) = \frac{-\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$. Autrement dit,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = -1.$$

φ admet donc une limite à droite en 0 et une limite à gauche en 0. Mais, puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$, la fonction φ n'admet pas de limite en 0. Par

conséquent, φ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

4. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Étudions si f est prolongeable par continuité en 0, autrement dit, si f admet une limite finie en 0.

Considérons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Alors les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers 0 et vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} f(u_n) = \sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = \sin(2n\pi) = \sin(0) = 0 \\ f(w_n) = \sin\left(\frac{1}{w_n}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(w_n) = 1.$$

On remarque que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(w_n)$.

On en déduit, d'après le théorème de caractérisation séquentielle de la limite, que la fonction f n'admet pas de limite en 0.

Ainsi, f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

89 On considère la fonction

$$g :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 10\ln(1+x) + x^2 + 2x - 10.$$

1. La fonction g est clairement dérivable sur son ensemble de définition. De plus :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, g'(x) = \frac{10}{1+x} + 2(1+x) > 0.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1	$+\infty$
signe de $g'(x)$	+	
variations de g		

2. La fonction g étant strictement monotone, elle établit une bijection de l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ dans $J = g(]-1, +\infty[)$. De plus, par continuité et croissance de g , on a :

$$J =] \lim_{x \rightarrow -1} g(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) [=] -\infty, +\infty [.$$

3. Comme $0 \in J$ et g est bijective de I dans J , d'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution à l'équation $g(x) = 0$ c'est-à-dire à l'équation : $10\ln(1+x) + x^2 + 2x - 10 = 0$.

4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 10\ln(1+x)}{1+x}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D} =]-1, +\infty[$.

En effet,

- la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ a pour ensemble de définition $]-1, +\infty[$ car l'ensemble de définition de la fonction \ln est $]0, +\infty[$,

- le dénominateur de f ne s'annule pas sur $]-1, +\infty[$.

5. Par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = \lim_{y \rightarrow 0} \ln(y) = -\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 10\ln(1+x)) = +\infty.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (1+x) = 0^+$. Donc, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{1+x} = +\infty$. Par produit, on en déduit la limite de f en -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty.$$

- Pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f(x) = \frac{x^2 - 10\ln(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} - 10 \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{x}{\frac{1}{x} + 1} - 10 \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

D'une part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) = +\infty$ et on sait, d'après le théorème des croissances comparées, que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$. Donc, par composition de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0.$$

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

6. La droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$.

Or, pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f(x) - (x - 1) = \frac{-1 - 10\ln(1+x)}{1+x} = -\frac{1}{1+x} - 10 \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Sachant que :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$ (d'après la théorème des croissances comparées),

on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = 0.$$

Autrement dit, la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est bien une asymptote à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.

100

1. Considérons l'équation (E) : $z^6 = 8$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Sachant que $8 = 2^3 = ((\sqrt{2})^2)^3 = (\sqrt{2})^6$, on a :

$$(E) \iff z^6 = (\sqrt{2})^6 \iff \frac{z^6}{(\sqrt{2})^6} = 1 \iff \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^6 = 1 \iff \frac{z}{\sqrt{2}} \in \mathbb{U}_6.$$

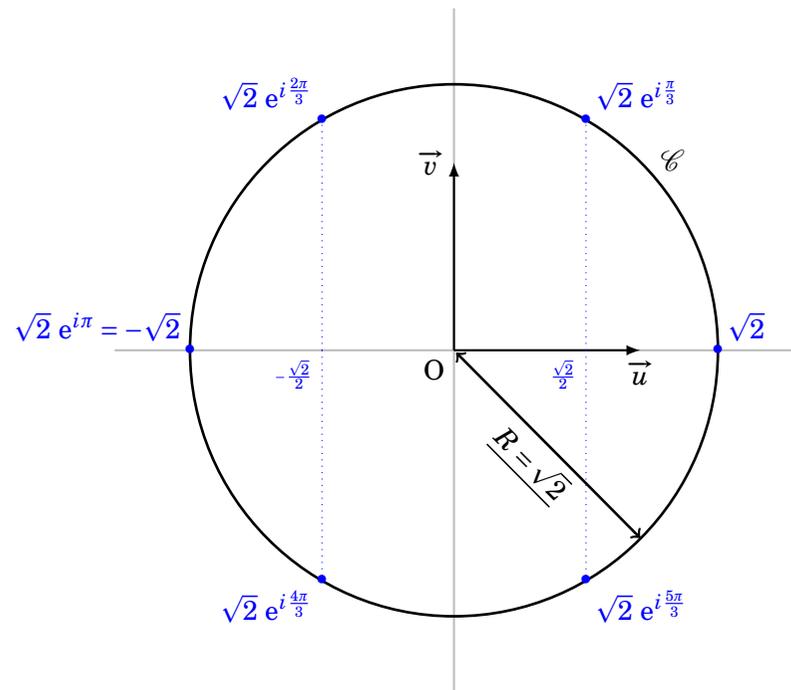
D'après le théorème sur les racines n -ièmes de l'unité pour $n = 6$, on en déduit :

$$(E) \iff \exists k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, \frac{z}{\sqrt{2}} = e^{i \frac{2k\pi}{6}} \iff \exists k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, z = \sqrt{2} e^{i \frac{k\pi}{3}}.$$

Les solutions de (E) sont donc :

$$\sqrt{2}, \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{3}}, \sqrt{2} e^{i \frac{2\pi}{3}}, \sqrt{2} e^{i\pi} = -\sqrt{2}, \sqrt{2} e^{i \frac{4\pi}{3}} \text{ et } \sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{3}}.$$

2. Représentons dans le plan ci-dessous les six solutions de (E) :



112

1. Démontrons que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.

Soit $x \in]-1; +\infty[$. Considérons la fonction

$$f :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(1+t).$$

Puisque la fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} , alors par composition la fonction f est dérivable sur $]-1; +\infty[$. De plus,

$$\forall t \in]-1; +\infty[, f'(t) = \frac{1}{1+t}.$$

- Si $x = 0$, alors $\ln(1+x) \leq x$ puisque $\ln(1) = 0$.
- Supposons $x > 0$. La fonction f étant continue sur $[0; x]$ et dérivable sur $]0; x[$, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis. Par conséquent, il existe un réel $c \in]0; x[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ i.e. } \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Puisque $c > 0$, on a $0 \leq \frac{1}{1+c} \leq 1$, c'est-à-dire

$$0 \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1.$$

En multipliant par x qui est strictement positif, on obtient :

$$\underline{\ln(1+x) \leq x}.$$

- Supposons $-1 < x < 0$. f est continue sur $[x; 0]$ et dérivable sur $]x; 0[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x; 0[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

On a :

$$\begin{aligned} -1 < x < c < 0 &\implies 0 < 1+x < 1+c < 1 \\ &\implies \frac{1}{1+c} \geq 1 \quad \text{car } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est décroissante sur }]0; +\infty[\\ &\implies \frac{\ln(1+x)}{x} \geq 1 \\ &\implies \underline{\ln(1+x) \leq x} \quad \text{car } x < 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \geq x}.$$

2. Considérons un entier naturel $n \geq 2$. On a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}.$$

Par conséquent, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \\ \iff e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq e \leq e^{-n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ \iff n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 \leq -n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{par croissance de la fonction } \ln \\ \iff \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ \iff \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ \iff \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Or, on sait d'après la question 1 que, puisque $\frac{1}{n} > -1$ et $-\frac{1}{n} > -1$, alors :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}.$$

D'après les équivalences ci-dessus on en déduit :

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}}.$$

113 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$ et soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.
Puisque f est continue sur $[a, b]$, alors g l'est également. De même, g est dérivable sur $]a, b[$ et :

$$\forall x \in]a, b[, \quad g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}.$$

D'autre part, $f(a) = f(b) = 0$ donc : $g(a) = g(b)$. Le théorème de Rolle permet alors d'affirmer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or

on a :

$$\begin{aligned} g'(c) = 0 &\iff \frac{f'(c)c - f(c)}{c^2} = 0 \\ &\iff f'(c)c - f(c) = 0 \\ &\iff f'(c) = \frac{f(c)}{c} \quad \text{car } c > 0 \text{ (puisque } 0 < a < c < b). \end{aligned}$$

On a donc bien démontré l'affirmation suivante :

$$\boxed{\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(c)}{c}.}$$

2. Cela signifie qu'il existe un point c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que la tangente à la courbe de f au point C de coordonnées $(c, f(c))$ est parallèle à la droite (OC) , où O est le point de coordonnées $(0, 0)$.

114 On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{1-x} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Rappelons que par définition, f est continue en 0 si :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{1-x} \right) = 1.$$

D'autre part, d'après les équivalents usuels en 0, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Or, par définition de f , on a : $f(0) = 0 + \frac{1}{1-0} = 1$. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)}.$$

Autrement dit, f est bien continue en 0.

2. Démontrons que f est dérivable à droite en 0. Calculons pour cela le taux d'accroissement de f en 0^+ . Soit $x > 0$, alors :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

D'après l'indication donnée dans l'énoncé, on a :

$$e^x - 1 - x \underset{(x \rightarrow 0)}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

D'où

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1/2$.

3. Étudions la dérivabilité à gauche de f en 0. Soit $x < 0$, alors :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x + \frac{1}{1-x} - 1}{x} = \frac{\frac{x(1-x) + 1 - (1-x)}{1-x}}{x} = \frac{\frac{x(2-x)}{1-x}}{x} = \frac{2-x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2.$$

On en déduit que f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = 2$.

4. On déduit des deux questions précédentes que f n'est pas dérivable en 0 puisque les dérivées à gauche et à droite en 0 ne coïncident pas.

5. On remarque que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty},$$

où la deuxième limite est obtenue à l'aide du théorème de croissances comparées.

6. (a) Rappelons que, pour tout $x < 0$:

$$f(x) = x + \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi, la droite Δ d'équation $\boxed{y = x}$ est asymptote à \mathcal{C}_f au voisinage de $-\infty$ puisque :

$$f(x) - x = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.$$

(b) Soit $x \leq 0$. Alors :

$$f(x) - x = \frac{1}{1-x} > 0.$$

Donc, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ se trouve au-dessus de } \Delta \text{ sur }]-\infty, 0]}$.

(c) Soit T la tangente à \mathcal{C}_f en 1. Alors, d'après le cours, l'équation de T est donnée par :

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1).$$

Or,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{e^x \times x - (e^x - 1) \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x - 1) + 1}{x^2}.$$

D'où $f'(1) = 1$. De plus, $f(1) = e - 1$.

Donc, T a pour équation $y = e - 1 + (x - 1)$, i.e. $\boxed{y = e - 2 + x}$.

123

1. On remarque que $P(1) = n \neq 0$. Donc 1 n'est pas racine de P .
Considérons alors $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$P(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-2} + z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Donc

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0 \\ &\iff 1 - z^n = 0 \\ &\iff z^n = 1 \\ &\iff \exists k \in [0, n - 1], z = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in [1, n - 1], z = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \quad \text{car } e^{i \frac{2 \times 0 \times \pi}{n}} = 1 \text{ et } z \neq 1. \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont les $n - 1$ nombres complexes

$$\boxed{e^{i \frac{2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [1, n - 1]}.$$

2. On déduit de la question 1 la factorisation suivante :

$$\boxed{P(z) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{i \frac{2k\pi}{n}} \right)}.$$

3. On en déduit également :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{i \frac{2k\pi}{n}} \right|} = \left| \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{i \frac{2k\pi}{n}} \right) \right| = |P(1)| = \left| \underbrace{1 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^{n-1}}_{=n} \right| = \boxed{n}.$$

4. Soit $k \in [1, n - 1]$.

$$\begin{aligned} 1 - e^{i \frac{2k\pi}{n}} &= e^{i \frac{k\pi}{n}} e^{-i \frac{k\pi}{n}} - e^{i \frac{k\pi}{n}} e^{i \frac{k\pi}{n}} \\ &= e^{i \frac{k\pi}{n}} \left(e^{-i \frac{k\pi}{n}} - e^{i \frac{k\pi}{n}} \right) \\ &= -e^{i \frac{k\pi}{n}} \left(e^{i \frac{k\pi}{n}} - e^{-i \frac{k\pi}{n}} \right) \\ &= -2ie^{i \frac{k\pi}{n}} \frac{e^{i \frac{k\pi}{n}} - e^{-i \frac{k\pi}{n}}}{2i} \\ &= -2ie^{i \frac{k\pi}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a donc :

$$\begin{aligned} n &= \prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left| -2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 \left| \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| \right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} 2 \right) \times \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left| \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| \right) \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left| \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right|. \end{aligned}$$

Or, pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$ on a $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$, donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$ et par conséquent :

$$\left| \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Ainsi,

$$2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n,$$

i.e.

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

124

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} |z - \alpha|^2 &= |(\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) - \alpha|^2 \\ &= |(\operatorname{Re}(z) - \alpha) + i\operatorname{Im}(z)|^2 \\ &= (\operatorname{Re}(z) - \alpha)^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 \\ &\geq (\operatorname{Im}(z))^2. \end{aligned}$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}^+ , on en déduit :

$$|z - \alpha| \geq \sqrt{(\operatorname{Im}(z))^2} = |\operatorname{Im}(z)|.$$

Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z - \alpha| \geq |\operatorname{Im}(z)|.$$

2. On suppose dans cette question que P est scindé sur \mathbb{R} . Puisque P est scindé sur \mathbb{R} et unitaire, il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que

$$P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\dots(X - \alpha_n) = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k).$$

Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| = \left| \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k) \right| = \prod_{k=1}^n |z - \alpha_k|.$$

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, donc d'après la question précédente : $\forall z \in \mathbb{C}, |z - \alpha_k| \geq |\operatorname{Im}(z)|$.

Par conséquent

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq \prod_{k=1}^n |\operatorname{Im}(z)| = |\operatorname{Im}(z)|^n.$$

3. Soit $P = 1 + X^3$.

(a) Cherchons les racines complexes de P . Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrivons $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$P(z) = 0 \iff z^3 = -1 \iff z^3 = e^{i\pi}$$

$$\iff \begin{cases} |z^3| = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z^3) = \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, 3\theta = \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = 1 \quad \text{car } r \geq 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{i(\pi/3 + k2\pi/3)}$$

$$\iff z = e^{i\pi/3} \text{ ou } z = e^{i\pi} = -1 \text{ ou } z = e^{i5\pi/3} = e^{-i\pi/3}.$$

Les racines complexes de P sont donc -1 , $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$ et une décomposition de P en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P = (X + 1) \left(X - e^{i\pi/3} \right) \left(X - e^{-i\pi/3} \right).$$

(b) Posons $z_0 = e^{i\pi/3}$. On a alors $P(z_0) = 0$ car z_0 est une racine de P et $\text{Im}(z_0) = \frac{\pi}{3} \neq 0$, donc

$$|P(z_0)| < |\text{Im}(z_0)|^3.$$

4. Supposons que : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^n$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine quelconque de P . Démontrons que z est réelle. Par hypothèse : $|\text{Im}(z)|^n \leq |P(z)| = 0$. Donc $|\text{Im}(z)|^n = 0$ et par conséquent $\text{Im}(z) = 0$, ce qui signifie que z est un nombre réel. On en déduit donc que toutes les racines de P sont réelles.

Tout polynôme non constant étant scindé sur \mathbb{C} , le polynôme P peut s'écrire sous la forme

$$P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n),$$

avec $\alpha_1 \in \mathbb{C}, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Les nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les racines de P . Or, on a démontré que toutes les racines de P sont réelles. On en déduit donc que : $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Le polynôme P est donc scindé sur \mathbb{R} .

5. • On a démontré dans la question 2 que si P est scindé sur \mathbb{R} , alors : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^n$.
 • Dans la question précédente, on a démontré que si l'assertion

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^n$$

est vraie, alors P est scindé sur \mathbb{R} .

On a donc démontré le résultat suivant :

« Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$. P est scindé sur \mathbb{R} si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^n$. »

125 On considère le polynôme à coefficients réels :

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1.$$

Soit α une racine complexe, non réelle et double de P .

1. Comme α est une racine double, on sait d'après le cours que :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0.$$

2. Le polynôme P est à coefficients réels. On sait dans ce cas que si α est une racine complexe de P , alors $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P . En appliquant le même raisonnement à P' , on en déduit que $\bar{\alpha}$ est racine double de P .

3. P est un polynôme de degré 4 de coefficient dominant 1 et admettant pour racines doubles α et $\bar{\alpha}$. On en déduit immédiatement que :

$$P(X) = 1 \times (X - \alpha)^2 (X - \bar{\alpha})^2.$$

4. La factorisation de P sur $\mathbb{R}[X]$ est obtenue en regroupant les racines conjuguées de P . Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X) &= ((X - \alpha)(X - \bar{\alpha}))^2 \\ &= (X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha})^2 \\ &= (X^2 - 2\text{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2) \cdot (X^2 - 2\text{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2). \end{aligned}$$

5. En utilisant l'expression factorisée de P donnée à la question 3, on trouve :

$$P(0) = (0 - \alpha)^2 (0 - \bar{\alpha})^2 = (\alpha\bar{\alpha})^2 = |\alpha|^4$$

Or $P(0) = 1$ par définition de P . On en déduit : $|\alpha| = 1$ (car c'est un nombre réel positif).

6. En développant l'expression donnée à la question 3, on trouve :

$$P(X) = X^4 - 4\text{Re}(\alpha)X^3 + (2|\alpha|^2 + 4\text{Re}(\alpha)^2)X^2 - 4\text{Re}(\alpha)|\alpha|^2X + |\alpha|^4.$$

Par identification avec les coefficients du polynôme P , on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} -4\text{Re}(\alpha) = -2 \\ 2|\alpha|^2 + 4\text{Re}(\alpha)^2 = 3 \\ -4\text{Re}(\alpha)|\alpha|^2 = -2 \\ |\alpha|^4 = 1 \end{cases}$$

On en déduit alors : $\Re e(\alpha) = \frac{1}{2}$. Et puisque $|\alpha|^2 = (\Re e(\alpha))^2 + (\Im m(\alpha))^2$, il vient :

$$(\Im m(\alpha))^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Par conséquent,

$$\Im m(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \Im m(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

126

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $P_n(z) = 0 \iff z^n - (z-1)^n = 0 \iff z^n = (z-1)^n$. Remarquons que $P_n(0) = 0^n - (0-1)^n = -(-1)^n \neq 0$. Ainsi 0 n'est pas solution de l'équation $P_n(z) = 0$. On peut donc écrire :

$$P_n(z) = 0 \iff \frac{(z-1)^n}{z^n} = 1 \iff \left(\frac{z-1}{z}\right)^n = 1 \iff \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n = 1.$$

Ainsi $P_n(z) = 0$ si et seulement si $1 - \frac{1}{z}$ est une racine n -ième de l'unité. Notons $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ les n racines n -ièmes de l'unité définies par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, 1 - \frac{1}{z} = \omega_k \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{1}{z} = 1 - \omega_k. \end{aligned}$$

Or l'équation $\frac{1}{z} = 1 - \omega_k$ a des solutions si et seulement si $1 - \omega_k \neq 0$. De plus, la seule racine n -ième de l'unité égale à 1 est $\omega_0 = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{1}{z} = 1 - \omega_k \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z = \frac{1}{1 - \omega_k}. \end{aligned}$$

Les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P_n(z) = 0$ sont donc les $n-1$ nombres complexes de la forme $z_k = \frac{1}{1 - \omega_k}$ avec $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

2. Pour tout réel θ ,

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{i\theta}}{2i} &= (1 - e^{i\theta}) e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} = (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\theta} e^{-i\frac{\theta}{2}}) e^{i\frac{\theta}{2}} = (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= -2i \left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i} \right) e^{i\frac{\theta}{2}} = \boxed{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}} \text{ d'après les formules d'Euler.} \end{aligned}$$

3. Les racines de $P_n(X)$ sont les solutions z_1, \dots, z_{n-1} de l'équation $P_n(z) = 0$ trouvées dans la question 3(a). Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On a :

$$z_k = \frac{1}{1 - \omega_k} = \frac{1}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}},$$

et d'après la question 3(b) avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ on a $1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} = -2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}}$. D'où

$$z_k = \frac{1}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}}} = \frac{i}{2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{-i\frac{k\pi}{n}} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)}.$$

Puisque $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $0 < k < n$, donc $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$ et donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$.

La forme exponentielle de z_k est donc : $z_k = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)}$.