Les nombres complexes

1 Écrire sous forme algébrique :

1. $i\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i\right)$
2. $\frac{1}{4-3i}$
3. $(1+i)(1-2i)$
4. $\frac{1-i}{3+2i}+2\frac{1+3i}{2-3i}$.

2 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$A = (2+i)(1-i)^2$

$B = \frac{1+2i}{1-i}$

$C = \frac{3+2i}{1+i}-\frac{1-2i}{1-i}$

$D = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

3 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant :

$$\left|\frac{z-1}{z+3}\right| = 1.$$

4 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M d'affixe z où z vérifie l'équation donnée :

a) $\mathrm{Re}(z+1)=0$ b) $|z|=2$ c) $|z+1|=|z|$.

5 Résoudre l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ suivante :

$$(E)\ :\ z-2\overline{z}+2=0.$$

6 Soit $z=\frac{a+ib}{c+id}$ où a, b, c et d sont des nombres réels tels que $c+id\neq 0$. Trouver une relation entre a, b, c et d pour que :

1. z soit un nombre réel,
2. z soit imaginaire pur.

7 Résoudre l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ suivante :

$$(E)\ :\ 2\overline{z}-2+6i=z.$$

8 Soient z et z' deux nombres complexes. Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ? Le démontrer.

A_1 : Si $z-\overline{z}=0$ alors $z=0$.

A_2 : Si $|z|=1$ et que $|z+z'|=1$ alors $z'=0$.

A_3 : Si $\mathrm{Im}(z+z')=0$ alors z et z' sont conjugués.

A_4 : Si z est sur le cercle trigonométrique alors $1/z$ l'est aussi.

9 Écrire sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle le nombre complexe :

$$\chi = \frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}.$$

10 Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i},\quad z_2=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}{2-2i},\quad \text{et}\quad z_3=(1-i)^6.$$

11 On pose : $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-i$.

1. Donner la forme exponentielle de z_1z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

12 Soit $x\in\mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin(2x)\cos(3x)$,
2. $\cos^2 x.\sin^2 x$,
3. $\cos^3 x+2\cos^2 x$,
4. $\sin^2(3x)+\cos^2(2x)$.

13 Soit $\theta\in]-\pi,\pi[$. Écrire $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ sous forme algébrique.

S'exprimer et raisonner en mathématiques

1. Les essentiels

14 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f ne prend que des valeurs positives
2. f s'annule
3. f est majorée
4. f est bornée
5. f n'est pas la fonction nulle
6. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts
7. f est la fonction nulle
8. f s'annule une seule fois
9. f est paire
10. f atteint toutes les valeurs de l'ensemble $\mathbb{N}$.

15 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$
4. $\forall x \in I, (f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0)$.
5. $\forall x \in I, f(x) \leqslant 0$
6. $\forall a > 0, \exists x \in I, f(x) = a$
7. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) + M = 0$
8. $\forall x \in I, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$.

16
1. Si P et Q sont deux assertions logiques, rappeler la négation et la contraposée de $P \Rightarrow Q$.
2. On se donne deux nombres réels a et b. On considère l'implication $(\star)$ suivante :
$$\left(\exists k \in \mathbb{Z}, a = b + 2k\pi\right) \Rightarrow \sin(a) = \sin(b).$$
   (a) Cette implication $(\star)$ est-elle vraie ?
   (b) Écrire la contraposée de l'implication $(\star)$.
   (c) Écrire la négation de l'implication $(\star)$.
   (d) Écrire la réciproque de l'implication $(\star)$. Cette réciproque est-elle vraie ? Pourquoi ?

2. Pour travailler seul

17 Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I à valeurs réelles. Exprimer verbalement les assertions suivantes :

1. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad f(x) = C$,
2. $\forall x \in I, \quad \big(f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\big)$,
3. $\forall x \in I, \forall y \in I, \quad \big(x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)\big)$,
4. dans le cas où $I = \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + \pi) = f(x)$.

18 On définit les assertions suivantes :

- D : « Je dors. »
- T : « Je travaille. »
- P : « Je parle. »
- R : « Je rêve. »

Exprimer sous forme symbolique les affirmations ci-dessous.

1. Je travaille et je rêve, mais je ne dors pas.
2. Quand je travaille, je ne parle pas.
3. Chaque fois que je travaille, je parle mais je ne dors pas.
4. Si je travaille ou si je parle, alors je dors.
5. Il suffit que je travaille pour que je rêve.
6. Une condition nécessaire pour que je travaille et que je parle est que je rêve.
7. Je travaille et je parle si et seulement si je rêve ou je dors.
8. Soit je travaille et je rêve, soit si je dors alors je ne parle pas.

19 *« Si je vais au cinéma, alors je porte mes lunettes et je ne dors pas. Si je ne dors pas, alors je mange des pop corn. Je ne mange pas de pop corn. »* Que peut-on en déduire ?

- ☐ Je dors.
- ☐ Je ne dors pas.
- ☐ Je ne vais pas au cinéma.
- ☐ Je ne porte pas mes lunettes.
- ☐ Je vais au cinéma et je dors.
- ☐ Je ne porte pas mes lunettes et je ne vais pas au cinéma.

20 On considère l'assertion (P) : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(x^2 \geqslant 5 \Longrightarrow x \geqslant \sqrt{5}\right)$. Écrire la négation de (P). L'assertion (P) est-elle vraie ? Justifier la réponse.

21 Les phrases suivantes signifient-elles $A \Rightarrow B$ ou $B \Rightarrow A$?

1. Si A, alors B.
2. Pour que A, il faut que B.
3. Pour que A, il suffit que B.
4. A est une condition suffisante pour B.
5. A est une condition nécessaire pour B.
6. A dès que B.
7. A est faux si B l'est.

Trigonométrie et compléments de calcul algébrique

1. Équations et inéquations

22 Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\frac{x}{y}$ sachant que $x \in [3;6]$ et $y \in [-4;2]$.

23 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = 1 + f(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2;2]$.

24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

(E_1) : $|x-5| = 2|x+5|$

(E_2) : $|2-x| + |2x-1| = 2$

(E_3) : $x + |x-1| = 1 + |x|$

(E_4) : $2x^2 + |x-1| = |x+1|$.

25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

1. $x^3 + 5x \leqslant 6x^2$
2. $|x-2| + |x-1| < 3$
3. $\left|1-2x^2\right| \geqslant 3$
4. $x^2 + |x-1| - |2x+1| < 0$.

2. Trigonométrie

26 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes d'inconnue x et placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions.

1. $\sin x = \frac{1}{2}$
2. $2\sin^2 x = 1$
3. $\sin^2 x + 3\cos x + \frac{3}{4} = 0$
4. $\sin(2x) = \cos(x)$.
5. $2\cos x = \sqrt{3}$
6. $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sqrt{2}$
7. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$
8. $\tan(x) = \sqrt{3}$.

27 Résoudre dans $[0;2\pi[$ les inéquations trigonométriques :

$$2\sin x \leqslant \sqrt{3}, \quad 1 + 2\sin x \geqslant 0, \quad 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0.$$

28 Résoudre dans $[-\pi,\pi[$ les inéquations suivantes :

$$2\cos(x) \geqslant 1, \quad |\sin(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos^2 x > 1.$$

29

1. Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'équation suivante d'inconnue x :
$$\cos(2x) = \frac{1}{2}.$$
2. Résoudre dans $[-\pi,\pi[$ l'équation ci-dessous d'inconnue x :
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Produits et sommes

30 Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$A_n = 2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + n^5,$$
$$B_n = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n),$$
$$C_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n,$$
$$D = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{3^3}\right)\left(1 - \frac{1}{3^5}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{3^{101}}\right).$$

31 Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$A_n = 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{n-1},$$
$$B_n(x) = 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots + 1024x^{10},$$
$$C_n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n,$$
$$D_n = \left(2+3^2\right) \times \left(2+3^4\right) \times \left(2+3^6\right) \times \cdots \times \left(2+3^{84}\right).$$

32 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$;
2. $\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}$;
3. $\sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$;
4. $\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{3}{5^k}\right)$;
5. $\sum_{k=n}^{2n}(3k-2)$.

33 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)$;
2. $\sum_{k=0}^{n} 3^{2k}$;
3. $\sum_{i=0}^{n} \frac{3^i}{2^{3i+2}}$;
4. $\sum_{k=1}^{n}\left(2k-\frac{5}{7^k}\right)$;
5. $\sum_{k=n}^{2n}(2k-3)$.

34 Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose $z=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$.

1. Vérifier que pour tout réel θ, $\quad 1-\mathrm{e}^{i\theta}=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\theta/2}$.
2. Calculer la somme : $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$.
3. En déduire $\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

35 Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Démontrer que lorsque k est un entier naturel non nul : $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}$. Calculer alors $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

36

1. Pour k entier, développer la différence : $(k+1)^3-k^3$.
2. En déduire pour $n\in\mathbb{N}$ la somme : $\sum_{k=1}^{n}k^2$.
3. Calculer : $\quad 1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n\times(n+1)$.

37 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes avec la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},\qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k},\qquad \sum_{j=1}^{2n}3^j\binom{2n}{j}.$$

38 Soit $\theta\in\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

39 Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$.

4. Pour travailler seul

40 Pour tout réel x, on note $\lfloor x\rfloor$ la partie entière de x. Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$.

41 En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right),\quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right),\quad \tan\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

En déduire les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right),\quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right),\quad \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

42 Soit $x\in[0,\pi]$. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |\sin(nx)|\leqslant n\sin(x).$$

43 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=n}^{2n}\sqrt{3^k}$;
2. $\sum_{k=0}^{2n}|k-n|$;
3. $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$;
4. $\prod_{j=1}^{n}x^j$ où $x\in\mathbb{R}$;
5. $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, où $n\geqslant 2$.

44 Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$P_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k},\qquad S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}.$$

En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ par la formule du binôme de Newton, simplifier P_n et S_n.

Suites réelles

1. Les essentiels

45 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1; \quad u_1 = 1; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n. \end{cases}$$

On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{et} \quad b_n = 2^n u_n.$$

1. Démontrer que $(a_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme a_0. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Démontrer que $(b_n)_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme b_0. Exprimer b_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

46 On pose :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+3u_n}. \end{cases}$$

1. Démontrer que $u_n > 0$ pour tout entier n.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier n.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout n.

47 On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Démontrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ.
2. En déduire un encadrement de ℓ d'amplitude 10^{-5}.

48 Soit $(s_n)_n$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

1. Prouver que les suites $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(s_n)_n$ est convergente.

49 *La constante d'Euler.* On admet que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}.$$

On pose pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $H_n \geqslant \ln n + \frac{1}{n}$. *Indication* : $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $H_n \leqslant 1 + \ln n$. *Indication* : $H_n = 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{H_n}{\ln n}$ puis un équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On pose alors pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n = H_n - \ln n \quad \text{et} \quad w_n = v_n - \frac{1}{n}.$$

   (a) Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
   (b) En déduire qu'il existe une constante réelle γ et une suite $(\varepsilon_n)_n$ telles que

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

50 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

1. $u_n = \frac{3^n}{2^n}$
2. $u_n = \frac{2n+3}{3n-5}$
3. $u_n = e^{1-n}$
4. $u_n = 5n+7-n^2$
5. $u_n = n - \ln n$
6. $u_n = n + 5\cos n$
7. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$
8. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

51 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

1. $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$
2. $u_n = \dfrac{2n^2+3n}{n^2-n+2}$
3. $u_n = n - \exp(n)$
4. $u_n = 2\sin(n) - n$
5. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$
6. $u_n = \dfrac{2n^5}{n!}$
7. $u_n = \dfrac{n!}{3^n}$

52 Démontrer les relations ci-dessous au voisinage de $+\infty$:

$$n^3 + 3n \sim n^3, \quad n - \ln(n) \sim n, \quad 3\ln(n) \not\sim \ln(n), \quad n^{24} + 4\ln(n) = o\left(e^n\right).$$

53 Démontrer les relations ci-dessous au voisinage de $+\infty$:

$$2n^2 - n \sim 2n^2, \quad \exp(2n) + n^3 + n! \sim n!, \quad 2n^2 \not\sim n^2.$$

54 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

55 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

2. Pour travailler seul

56 Quelle est la raison d'une suite géométrique $(u_n)_n$ telle que :

$$u_0 = 90 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = 150 \,?$$

57 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + \pi. \end{cases}$$

1. Soit α un nombre réel. Déterminer α pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique.
2. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

58 Considérons la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} -1 < u_0 < 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 4}. \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

59 *Médian 2014.* 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissante telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k,$$

ainsi que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = S_{2n}, \\ v_n = S_{2n+1}. \end{cases}$$

(a) Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

(b) En déduire que la suite $(S_n)_n$ converge.

2. Soit $(b_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} b_0 = -\dfrac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n) + \lfloor b_n \rfloor + 1, \end{cases}$$

où $\lfloor b_n \rfloor$ désigne la partie entière de b_n. On admettra l'inégalité ci-dessous que l'on pourra utiliser dans la suite de l'exercice :

$$\forall x \in [-1, 0[, \quad \sin(x) > x.$$

(a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant b_n < 0.$$

(b) En déduire une expression simplifiée de b_{n+1} en fonction de b_n.

(c) Démontrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(d) Démontrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

(e) Démontrer que la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} b_k$$

est convergente.