Les nombres complexes

1 Écrire sous forme algébrique :

1. $i\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i\right)$
2. $\frac{1}{4-3i}$
3. $(1+i)(1-2i)$,
4. $\frac{1-i}{3+2i}+2\frac{1+3i}{2-3i}$.

2 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$A = (2+i)(1-i)^2$

$B = \frac{1+2i}{1-i}$

$C = \frac{3+2i}{1+i}-\frac{1-2i}{1-i}$

$D = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

3 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant :

$$\left|\frac{z-1}{z+3}\right| = 1.$$

4 Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M d'affixe z où z vérifie l'équation donnée :

a) $\mathrm{Re}(z+1)=0$ b) $|z|=2$ c) $|z+1|=|z|$

5 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E)\ :\ z-2\overline{z}+2=0.$$

6 Soit $z=\frac{a+ib}{c+id}$ où a, b, c et d sont des nombres réels tels que $c+id \neq 0$. Trouver une relation entre a, b, c et d pour que :

1. z soit un nombre réel,
2. z soit imaginaire pur.

7 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E)\ :\ 2\overline{z}-2+6i=z.$$

8 Soient z et z' deux nombres complexes. Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ? Le démontrer.

A_1 : Si $z-\overline{z}=0$ alors $z=0$.

A_2 : Si $|z|=1$ et que $|z+z'|=1$ alors $z'=0$.

A_3 : Si $\mathrm{Im}(z+z')=0$ alors z et z' sont conjugués.

A_4 : Si z est sur le cercle trigonométrique alors $1/z$ l'est aussi.

9 Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i},\quad z_2=\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{2-2i},\quad \text{et}\quad z_3=(1-i)^6+1$$

10 On pose :

$$z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\quad \text{et}\quad z_2=1-i$$

1. Donner la forme exponentielle de z_1z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

11 Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$. Écrire $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ sous forme algébrique.

12 Soit $x \in \mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin(2x)\cos(3x)$,
2. $\cos^2 x.\sin^2 x$,
3. $\cos^3 x+2\cos^2 x$,
4. $\sin^2(3x)+\cos^2(2x)$.

13 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

S'exprimer et raisonner en mathématiques

1. Les essentiels

14 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f ne prend que des valeurs positives,
2. f s'annule,
3. f est majorée,
4. f est bornée,
5. f n'est pas la fonction nulle,
6. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts.

15 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est la fonction nulle,
2. f s'annule une seule fois,
3. f est bornée,
4. f est paire,
5. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

16 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$;
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I,\ f(x) = y$;
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant M$;
4. $\forall x \in I,\ (f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0)$.

17 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1. $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant 0$
2. $\forall z > 0, \exists x \in I,\ f(x) = z$
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) + M = 0$
4. $\forall x \in I,\ (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$.

18

1. Si P et Q sont deux assertions logiques, rappeler la négation et la contraposée de $P \Rightarrow Q$.
2. On se donne deux nombres réels a et b. On considère l'implication $(\star)$ suivante :
$$\big(\exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + 2k\pi\big) \Rightarrow \sin(a) = \sin(b).$$
   (a) Cette implication $(\star)$ est-elle vraie ?
   (b) Écrire la contraposée de l'implication $(\star)$.
   (c) Écrire la négation de l'implication $(\star)$.
   (d) Écrire la réciproque de l'implication $(\star)$. Cette réciproque est-elle vraie ? Pourquoi ?

2. Pour travailler seul

19 On définit les assertions suivantes :

- B : « Je bouge. »
- D : « Je dors. »
- P : « Je parle. »
- R : « Je rêve. »

Exprimer sous forme symbolique les affirmations ci-dessous.

1. Je dors et je rêve, mais je ne bouge pas.
2. Quand je dors, je ne parle pas.
3. Chaque fois que je dors, je parle mais je ne bouge pas.
4. Si je dors ou si je parle, alors je bouge.
5. Il suffit que je dorme pour que je rêve.
6. Une condition nécessaire pour que je dorme et que je parle est que je rêve.
7. Je dors et je parle si et seulement si je rêve ou je bouge.
8. Soit je dors et je rêve, soit si je bouge alors je ne parle pas.

20 Les phrases suivantes signifient-elles $A \Rightarrow B$ ou $B \Rightarrow A$?

1. Si A, alors B.
2. Pour que A, il faut que B.
3. Pour que A, il suffit que B.
4. A est une condition suffisante pour B.

5. A est une condition nécessaire pour B.
6. A dès que B.
7. A est faux si B l'est.

21 Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I à valeurs réelles. Exprimer verbalement les assertions suivantes :

1. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad f(x) = C,$
2. $\forall x \in I, \quad \big(f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\big),$
3. $\forall x \in I,\ \forall y \in I, \quad \big(x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)\big),$
4. dans le cas où $I = \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+\pi) = f(x)$.

22 On considère l'assertion (P) : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(x^2 \geqslant 5 \Longrightarrow x \geqslant \sqrt{5}\big)$. Écrire la négation de (P). (P) est-elle vraie ? Justifier la réponse.

23 *« Si je dors, alors je rêve et je ne ronfle pas. Si je ne ronfle pas, alors je parle. Je ne parle pas. »* Que peut-on en déduire ?

- ☐ Je ronfle.
- ☐ Je ne ronfle pas.
- ☐ Je ne dors pas.
- ☐ Je ne rêve pas.
- ☐ Je dors et je ronfle.
- ☐ Je ne rêve pas et je ne dors pas.

Trigonométrie et compléments de calcul algébrique

1. Équations et inéquations

24 Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\frac{x}{y}$ sachant que $x \in [3;6]$ et $y \in [-4;2]$.

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = 1 + f(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2;2]$.

26 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1) : |x-5| = 2\,|x+5|,$ $\qquad$ $(E_2) : |2-x| + |2x-1| = 2.$

27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1) : x + |x-1| = 1 + |x|,$ $\qquad$ $(E_2) : 2x^2 + |x-1| = |x+1|.$

28 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^3 + 5x \leqslant 6x^2$;
2. $|x-2| + |x-1| < 3$;

29 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\left|1 - 2x^2\right| \geqslant 3$;
2. $x^2 + |x-1| - |2x+1| < 0$;

2. Trigonométrie

30 Résoudre dans $[0;2\pi[$ les inéquations trigonométriques :

$$2\sin x \leqslant \sqrt{3}, \quad 1+2\sin x \geqslant 0, \quad 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0.$$

31 Résoudre dans $[-\pi,\pi[$ les inéquations suivantes :

$$2\cos(x) \geqslant 1, \quad |\sin(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos^2 x > 1.$$

.

32 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, et placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions.

1. $\sin x = \frac{1}{2}$;
2. $2\sin^2 x = 1$;
3. $\sin^2 x + 3\cos x + \frac{3}{4} = 0$;
4. $\sin(2x) = \cos(x)$.

33 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, et placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions.

1. $2\cos x = \sqrt{3}$;
2. $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sqrt{2}$;
3. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$;
4. $\tan(x) = \sqrt{3}$.

3. Produits et sommes

34 Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$A_n = 2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + n^5,$$
$$B_n = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n),$$
$$C_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n,$$
$$D = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^5}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{3^{101}}\right).$$

35 Soient n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$A_n = 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{n-1},$$
$$B_n(x) = 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots + 1024x^{10},$$
$$C_n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n,$$
$$D_n = \left(2+3^2\right) \times \left(2+3^4\right) \times \left(2+3^6\right) \times \cdots \times \left(2+3^{84}\right).$$

36 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$;
2. $\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}$;
3. $\sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$;
4. $\sum_{k=1}^{n}\left(k - \frac{3}{5^k}\right)$;
5. $\sum_{k=n}^{2n}(3k-2)$;

37 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)$;
2. $\sum_{k=0}^{n} 3^{2k}$;
3. $\sum_{i=0}^{n} \frac{3^i}{2^{3i+2}}$;
4. $\sum_{k=1}^{n}\left(2k - \frac{5}{7^k}\right)$;
5. $\sum_{k=n}^{2n}(2k-3)$;

38 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que lorsque k est un entier naturel non nul : $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$. Calculer alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

39
1. Pour k entier, développer la différence : $(k+1)^3 - k^3$.
2. En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ la somme : $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3. Calculer : $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1)$.

40 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes avec la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}, \quad \sum_{j=1}^{2n} 3^j\binom{2n}{j}.$$

4. Pour travailler seul

41 Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

42 En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \tan\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

En déduire les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right), \quad \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

43 Soit $x \in [0, \pi]$. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leqslant n \sin(x).$$

44 Soit n un entier naturel non nul. Calculer les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \sqrt{3^k}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} |k-n|$;
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$;
4. $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} x^j$ où $x \in \mathbb{R}$;
5. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, où $n \geqslant 2$.

45 Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ par la formule du binôme de Newton, simplifier P_n et S_n.

Suites réelles

1. Les essentiels

46 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1; \quad u_1 = 1; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n. \end{cases}$$

On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \quad \text{et} \quad b_n = 2^n u_n.$$

1. Démontrer que $(a_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme a_0. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Démontrer que $(b_n)_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme b_0. Exprimer b_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

47 On pose :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+3u_n}. \end{cases}$$

1. Démontrer que $u_n > 0$ pour tout entier n.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier n.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout n.

48 On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Démontrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ.

2. En déduire un encadrement de ℓ d'amplitude 10^{-5}.

49 Soit $(s_n)_n$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

1. Prouver que les suites $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(s_n)_n$ est convergente.

50 *La constante d'Euler.* On admet que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}.$$

On pose pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $H_n \geqslant \ln n + \frac{1}{n}$. *Indication* : $H_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $H_n \leqslant 1 + \ln n$. *Indication* : $H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{H_n}{\ln n}$ puis un équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On pose alors pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n = H_n - \ln n \quad \text{et} \quad w_n = v_n - \frac{1}{n}.$$

   (a) Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

   (b) En déduire qu'il existe une constante réelle γ et une suite $(\varepsilon_n)_n$ telles que

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

51 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

1. $u_n = \frac{3^n}{2^n}$
2. $u_n = \frac{2n+3}{3n-5}$
3. $u_n = \mathrm{e}^{1-n}$
4. $u_n = 5n + 7 - n^2$
5. $u_n = n - \ln n$
6. $u_n = n + 5\cos n$
7. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$
8. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

52 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite $(u_n)_n$:

1. $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$
2. $u_n = \dfrac{2n^2+3n}{n^2-n+2}$
3. $u_n = n - \exp(n)$
4. $u_n = 2\sin(n) - n$
5. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$
6. $u_n = \dfrac{2n^5}{n!}$
7. $u_n = \dfrac{n!}{3^n}$

53 Démontrer les relations ci-dessous :

$$n^3 + 3n \sim n^3, \quad n - \ln(n) \sim n, \quad 3\ln(n) \not\sim \ln(n).$$

54 Démontrer les relations ci-dessous :

$$2n^2 - n \sim 2n^2, \quad \exp(2n) + n^3 + n! \sim n!, \quad 2n^2 \not\sim n^2.$$

55 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

56 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

2. Pour travailler seul

57 Quelle est la raison d'une suite géométrique $(u_n)_n$ telle que :

$$u_0 = 90 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = 150 \ ?$$

58 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + \pi. \end{cases}$$

1. Soit α un nombre réel. Déterminer α pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique.
2. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

59 Considérons la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} -1 < u_0 < 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 4}. \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

60 *Médian 2014.* 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissante telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k,$$

ainsi que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = S_{2n}, \\ v_n = S_{2n+1}. \end{cases}$$

(a) Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

(b) En déduire que la suite $(S_n)_n$ converge.

2. Soit $(b_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} b_0 = -\dfrac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \sin(b_n) + \lfloor b_n \rfloor + 1, \end{cases}$$

où $\lfloor b_n \rfloor$ désigne la partie entière de b_n. On admettra l'inégalité ci-dessous que l'on pourra utiliser dans la suite de l'exercice :

$$\forall x \in [-1, 0[, \quad \sin(x) > x.$$

(a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant b_n < 0.$$

(b) En déduire une expression simplifiée de b_{n+1} en fonction de b_n.

(c) Démontrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(d) Démontrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

(e) Démontrer que la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} b_k$$

est convergente.

Ensembles et applications

1. Les essentiels

61 On considère l'ensemble $E = \{a;b;c\}$. Peut-on écrire

1. $a \subset E$?
2. $a \in E$?
3. $\{a\} \subset E$?
4. $\{a\} \in \mathscr{P}(E)$?
5. $\emptyset \subset E$?
6. $\emptyset \in E$?
7. $\{\emptyset\} \subset E$?
8. $\{\emptyset\} \subset \mathscr{P}(E)$?
9. $\{a\} \in E$?

62 Les applications suivantes sont-elles bijectives ? Justifier et déterminer les bijections réciproques le cas échéant.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
4. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, y^2) \end{array}$

63 Les applications suivantes sont-elles bijectives ? Justifier et déterminer les bijections réciproques le cas échéant.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n-1 \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-2y) \end{array}$
4. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$

64 Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.
Déterminer les ensembles $f(\mathbb{R})$ et $g([-1;4])$.

65 Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$.
Déterminer les ensembles $f(]1,+\infty[)$ et $g([-\pi;\pi/6])$.

2. Pour travailler seul

66 Soient E un ensemble non vide et a un élément de E. Expliciter l'ensemble $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\{a\})\big)$.

67 Étant données A, B et C trois parties d'un ensemble E, démontrer les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$

68 On considère deux applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f(n) = 2n, \quad g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. f est-elle bijective ?
2. g est-elle bijective ?
3. Déterminer $(g \circ f)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Démontrer que $f \circ g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ puis calculer $(f \circ g)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

69 Dire si les applications suivantes sont bijectives. Le cas échéant, déterminer la bijection réciproque.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x+y) \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}, \\ z & \mapsto & \sqrt{2}\,\overline{z} + iz \end{array},$$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ X & \mapsto & \{1;2;3\} \cup X \end{array}.$$

70 *Final 2017.* Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$.
Calculer $f \circ f$. En déduire que f est bijective.

Limites et continuité

1. Les essentiels

71 Étudier la limite éventuelle en zéro de la fonction $f : x \longmapsto \dots$

1. $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $\frac{x - \ln x}{x}$
3. $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
4. $\frac{\sin(3x)}{x}$

72 Étudier la limite éventuelle en zéro de la fonction $f : x \longmapsto \dots$

1. $\frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $\frac{\cos x}{x^2}$
3. $\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$
4. $\frac{\cos x - 1}{x^2}$.

73 Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2 - x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$
4. $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

74 Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + 2x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \ln x\right)$
4. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

75 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right).$$

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2) - \ln(1 + e^{-2x}) \\ &= \ln(2) + 2x - \ln\left(1 + e^{2x}\right). \end{aligned}$$
2. Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

76 Soit $k \in \mathbb{R}$, k fixé. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1, \\ -2x + k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

77 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{si } x \leqslant 0, \\ \frac{\sin(ax)}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ en fonction des paramètres a et b.

78 Étudier la continuité en 0 de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

79 Démontrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution dans l'intervalle indiqué.

1. $x^5 - x^4 + 1 = 0$ dans $I = [-1; 0]$,
2. $\tan x = x + 1$ dans $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

80 Démontrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution dans l'intervalle indiqué.

1. $\mathrm{e}^x = 2 - x$ dans $\mathbb{R}$,
2. $\sin(x) + 1 = x$ dans $I = \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$,

81 Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f([0;1]) \subset [0;1]$. Démontrer qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = c$.

Indication : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

2. Pour travailler seul

82 Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Démontrer que la courbe représentant la fonction f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et étudier sa position par rapport à cette asymptote.

1. $f(x) = \dfrac{\ln(x) + 1 - x}{x + x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} - x$
3. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{5x}$
4. $f(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x} + 1 - 3x$

83 Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\mathrm{e}^x - x^2 + 1\right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)} - 1\right)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(5x)}$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ où $n \in \mathbb{N}^\star$.

84
1. Déterminer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2}$.
2. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-1;1], \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

85 Étudier si les fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}^*$ sont prolongeables par continuité en 0.

1. $g(x) = \dfrac{(1+x)^3 - 1}{x}$
2. $h(x) = \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\varphi(x) = \dfrac{|\sin(x)|}{x}$
4. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

86 *Final 2012.*

1. Dresser le tableau de variations de la fonction

$$\begin{array}{rccc} g & : &]-1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 10\ln(1+x) + x^2 + 2x - 10. \end{array}$$

2. Démontrer que g bijective de $]-1, +\infty[$ sur un ensemble J que l'on précisera.
3. En déduire que l'équation $10\ln(1+x) + x^2 + 2x - 10 = 0$ admet une unique solution. On notera α cette solution dans la suite.
4. On définit la fonction f par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 10\ln(1+x)}{1+x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal du plan. Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
5. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.
6. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x - 1$ pour asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Résolution d'équations à variable complexe

1. Les essentiels

87 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z :

1. $z^2+z+1=0$,
2. $z^6+z^3+1=0$,
3. $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, où $\theta\in\mathbb{R}$,
4. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$,
5. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$,
6. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$,
7. $2z^4-(2+i)z^2+1-i=0$,
8. $z^3=4\sqrt{2}(1+i)$

88 Déterminer les racines

1. carrées de $11+4i\sqrt{3}$,
2. cubiques de $8i$,
3. sixièmes de -27,
4. cubiques de $4(\sqrt{3}-i)$.

89 On définit l'application $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ par

$$\exp(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+i\sin y),\qquad \text{où } z=x+iy \text{ avec } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

1. Expliquer pourquoi la valeur 0 n'est pas prise par la fonction exp.
2. Pour $\alpha\in\mathbb{C}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $\exp(z)=\alpha$.
3. En déduire que $\exp(\mathbb{C})=\mathbb{C}^*$.

90 Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose $z=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$.

1. Vérifier que pour tout réel θ, $\quad 1-\mathrm{e}^{i\theta}=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\theta/2}$.
2. Calculer la somme : $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

91 Soit n un entier naturel supérieur à 2.

1. Calculer la somme et le produit des n racines n-ièmes de l'unité.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

92 Soient $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$ et ω une racine n-ième de l'unité telle que $\omega\neq 1$. On pose :

$$S=\sum_{k=1}^{n}k\omega^{k-1}.$$

En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

2. Pour approfondir

93 Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$.

94 On pose $E=\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et on considère l'application

$$f:\begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{C}^\star \\ z & \mapsto & \frac{2}{(z-1)^2}.\end{array}$$

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8-6i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=\frac{1}{4-3i}$.
3. Démontrer que $f(E)=\mathbb{C}^\star$. *On ne demande pas de calculer explicitement un antécédent de $\alpha\in\mathbb{C}^\star$ par f.*
4. Soit θ un nombre réel tel que $0<\theta<2\pi$.
   (a) Démontrer que $\mathrm{e}^{i\theta}-1=2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.
   (b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $f(\mathrm{e}^{i\theta})$.
5. On considère l'ensemble $\Delta=\{z\in\mathbb{C},\ \Re\mathrm{e}(z)=1\}$. Démontrer que

$$f(\Delta\setminus\{1\})=]-\infty,0[.$$

95 On considère le nombre complexe $u=\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. On pose encore :

$$S=u+u^2+u^4\quad\text{et}\quad T=u^3+u^5+u^6.$$

1. (a) Simplifier u^7.
   (b) Calculer la somme $1+u+u^2+\cdots+u^6$.
   (c) Calculer le produit $uu^2u^3\dots u^6$.
2. (a) Montrer que S et T sont deux nombres complexes conjugués.
   (b) Donner la valeur de $S+T$ et calculer $S\times T$.
   (c) Démontrer que la partie imaginaire de S est positive.
   (d) En déduire les valeurs exactes de S et T.
3. Calculer la somme :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

96 À quelle condition nécessaire et suffisante sur $n\in\mathbb{N}$ le nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^n$ est-il réel ?

97 On considère l'équation d'inconnue $Z\in\mathbb{C}$ suivante :

$$(E)\ :\ Z^2-2iZ-2=0.$$

1. Résoudre (E).
2. Soit maintenant $z=a+ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. Déterminer le module et l'argument de e^z.
3. En déduire les solutions de l'équation :

$$(S)\ :\ \mathrm{e}^{2z}-2i\mathrm{e}^z-2=0.$$

On pourra admettre que les solutions de (E) sont $1+i$ et $-1+i$ si on n'a pas réussi à répondre à la première question.

Dérivabilité

1. Les essentiels

98 Dans chacun des cas suivants :
- préciser sur quel ensemble la fonction f est dérivable,
- calculer sa dérivée f',
- déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f:x\mapsto \ln(\ln x)$, où $a=\mathrm{e}$
2. $f:x\mapsto\sqrt{5+\sin x}$, où $a=0$
3. $f:x\mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, où $a=0$
4. $f:x\mapsto\exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, où $a=0$
5. $f:x\mapsto\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, où $a=1$
6. $f:x\mapsto x^x$, où $a=1$.

99 Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $f:x\mapsto \mathrm{e}^{5x}$
2. $g:x\mapsto\frac{1}{1-x}$
3. $h:x\mapsto x\mathrm{e}^x$
4. $\varphi:x\mapsto\cos(2x)$.

100 Étudier la dérivabilité des fonctions f, g, h et u définies par :
- $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$, si $x\neq0$, et $f(0)=0$,
- $g(x)=\frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$, si $x\neq1$ et $h(1)=1$,
- $h(x)=\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, si $x\neq0$ et $g(0)=0$,
- $u(x)=\frac{x}{1+|x|}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

101 Déterminer deux réels a et b tels que la fonction f définie comme suit sur $\mathbb{R}^+$ soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si } x\in[0;1],\\ ax^2+bx+1 & \text{si } x>1.\end{cases}$

102 La fonction φ est définie sur $[1;+\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

1. Calculer $\varphi'(x)$. Démontrer que φ est une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. On note φ^{-1} la bijection réciproque de φ. Calculer $\left(\varphi^{-1}\right)'\left(\frac{e^2}{2}\right)$.

103 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x^3+x-2$. Démontrer que f est bijective et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

104 En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que :

1. $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ -x\leqslant \sin x\leqslant x$;
2. $\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ \ln(1+x)<x$;
3. $\forall x>0,\ \frac{1}{x+1}\leqslant \ln(x+1)-\ln x\leqslant \frac{1}{x}$.

105 Démontrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |\sin x-\sin y|\leqslant |x-y|.$$

2. Pour approfondir

106 On considère la fonction dérivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

1. (a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$.
   (b) En déduire le sens de variation de f, ainsi que les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=1-(f(x))^2.$$
3. (a) Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   (b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner une expression simple de $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in J$.

107

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, prouver que :
$$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[,\ 0\leqslant \tan x-x\leqslant x(\tan x)^2.$$
2. On considère la fonction $f:\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$
   (a) Étudier la parité de f.
   (b) Démontrer que f est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
   (c) Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
   (d) Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}=\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x\in\mathscr{D}$.

108 *Final 2017.* Soient $n\in\mathbb{N}^\star$ et la fonction $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n(x)=e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

1. En remarquant que pour tout réel x, $f_n(x)=e^{-x}\left(1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$, justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n{}'(x)=-e^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$
2. Démontrer que : $\forall x\in[0,1],\quad \left|f_n'(x)\right|\leqslant \dfrac{1}{n!}$.
3. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à f_n sur l'intervalle $[0,1]$.
4. On considère la suite de terme général $u_n=e\,f_n(1)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
   (a) Utiliser la question 3 pour démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) En déduire la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

3. Pour travailler seul

109 1. Démontrer que : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

2. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

110 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Démontrer que : $\exists c \in]a,b[,\quad f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

   Indication : considérer la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.
2. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

111 *Final 2014.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Démontrer que f est dérivable à droite en 0 et donner $f'_d(0)$. On pourra utiliser l'équivalent suivant : $\mathrm{e}^x - 1 - x \underset{(x\to 0)}{\sim} \frac{x^2}{2}$.
3. Démontrer que f est dérivable à gauche en 0 et donner $f'_g(0)$.
4. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
5. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
6. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   (a) Déterminer l'équation de l'asymptote Δ à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
   (b) Déterminer les positions relatives de Δ et de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1.

Polynômes

1. Les essentiels

112 Effectuer les divisions euclidiennes de

1. $X^4 + X^2 + X + 2$ par $X^2 - 3$,
2. $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$,
3. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$,
4. $4X^3 + 2iX^2$ par $X + i$.

113 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par :
1. $X + 3$, 2. $X^2 - 6X - 16$, 3. $(X-1)^2(X-2)$.

114 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par $(X-1)^2$.

115 Soient a et b deux nombres réels et $P = aX^{25} + bX^{24} + 1$. Déterminer a et b pour que P soit divisible par $(X-1)^2$.

116 Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles.

1. $4X^2 - X - 3$,
2. $X^3 - 8$,
3. $X^6 + 1$,
4. $X^7 - 1$,
5. $X^2 + X + 1$,
6. $X^4 + X^2 + 1$.

2. Pour approfondir

117 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que le polynôme $P = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

118 *Final 2018.* Le but de cet exercice est de prouver que la fonction exp définie sur $\mathbb{C}$ par
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\left[\cos\left(\mathrm{Im}(z)\right) + i\sin\left(\mathrm{Im}(z)\right)\right]$$
n'est pas polynomiale.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 1$.
2. Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \exp(z)$. Quelles sont les racines du polynôme $Q = P - 1$?
3. Que peut-on dire d'un polynôme admettant une infinité de racines ?
4. Démontrer que la fonction exp n'est pas une fonction polynomiale.

119

1. Soit $P = X^2 - 4X + 5$. Décomposer le polynôme P en produits facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On considère le polynôme suivant de $\mathbb{C}[X]$:
$$Q = X^3 - (1+2i)X^2 - 3X - 1 + 2i.$$
   (a) Démontrer que Q a une racine en commun avec P.
   (b) Effectuer la division euclidienne de Q par $X - \alpha$ où α est la racine commune à P et Q trouvée à la question précédente.
   (c) En déduire la décomposition de Q en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

3. Pour travailler seul

120 Soit n un entier, $n \geqslant 2$. On pose
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-2} + z^{n-1}.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. En déduire la factorisation de $P(z)$.
3. En calculant $P(1)$, prouver que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left|1 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = n$.
4. En déduire que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

121 *Final 2016.* Soient n un entier naturel non nul, et P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$, de degré n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z - \alpha| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|$.
2. On suppose dans cette question que P est scindé sur $\mathbb{R}$. En utilisant une factorisation de P, démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$.
3. On prend dans cette question $P = 1 + X^3$.
   (a) Donner une décomposition de P en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| < |\mathrm{Im}(z_0)|^3$.
4. On suppose dans cette question que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$. Démontrer que toutes les racines de P sont réelles. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
5. Énoncer clairement le résultat obtenu dans cet exercice.

122 *Final 2014.* On considère le polynôme à coefficients réels :
$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1.$$
On admet que ce polynôme admet une racine complexe, non réelle et double notée α ($\alpha \notin \mathbb{R}$). Le but de cet exercice est de déterminer α.

1. Que peut-on dire de $P(\alpha)$ et de $P'(\alpha)$?
2. En déduire que $\overline{\alpha}$ est aussi une racine double de P.
3. Montrer que la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est donnée par :
$$P(X) = (X - \alpha)^2(X - \overline{\alpha})^2.$$
4. En déduire la factorisation de $P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Exprimer $P(0)$ en fonction de $|\alpha|$ et en déduire $|\alpha|$.
6. Développer l'expression donnée à la question 3 et déterminer α.

Fonctions trigonométriques réciproques

123 Compléter le tableau des valeurs remarquables ci-dessous.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\cos(\theta)$									
$\sin(\theta)$									

En déduire les valeurs de :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \arctan(1), \quad \arcsin(0).$$

124 Calculer :

$$\arccos(0), \quad \arccos(-1), \quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \arctan\left(\sqrt{3}\right), \quad \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

125 Soit $x \in [-1,1]$.

1. Développer les expressions ci-dessous puis les exprimer sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$\cos(2\arccos(x)), \qquad \cos(2\arcsin(x)).$$

2. Démontrer que :

(a) $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (b) $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

126 Démontrer la formule ci-dessous :

$$\forall x \in [-1,1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

127 Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f\ :\ x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \qquad g\ :\ x \mapsto \arcsin x.$$

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g.
2. Déterminer les points où f et g sont dérivables et calculer leurs dérivées.
3. En déduire une relation entre f et g.

128 On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

1. Justifier que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression simplifier de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

129 Résoudre l'équation suivante : $\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

130 Démontrer les formules ci-dessous :

1. $\forall x \in [-1,1],\ \arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi$.
2. $\forall x > 0,\ \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

131 Démontrer la formule ci-dessous pour tout $x \in [0,1]$:

$$\arcsin(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

En déduire une formule analogue pour $x \in [-1,0]$.