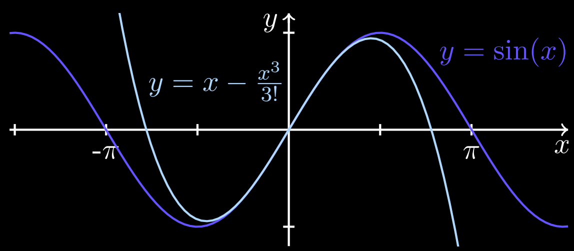
MTB

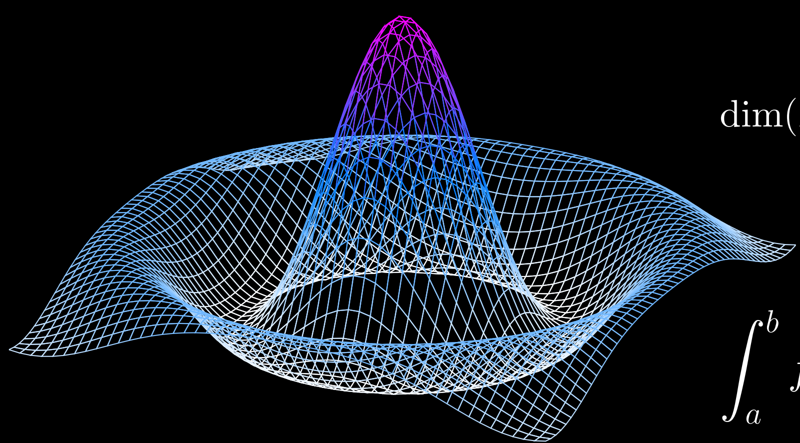
Algèbre linéaire
Analyse

Cours écrit par Alexis Flesch et Karine Mauffrey

Printemps 2021

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$





$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

Table des matières

Chapitre 1 — **Fonctions trigonométriques réciproques** — **Page 5**

I La fonction arc sinus — 5

II La fonction arccos — 6

III La fonction arc tangente — 7

Chapitre 2 — **Systèmes linéaires et matrices** — **Page 9**

I Systèmes linéaires — 9

Reconnaître un système linéaire – Systèmes linéaires échelonnés – Le pivot de Gauss

II Matrices rectangulaires — 11

L'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ – Opérations sur les matrices – Transposée d'une matrice – Écriture matricielle d'un système linéaire

III Matrices carrées — 14

Quelques matrices remarquables – Puissances d'une matrice – Matrices inversibles

Chapitre 3 — **Intégration sur un segment** — **Page 20**

I Sommes de Riemman — 20

Intégrale d'une fonction continue sur un segment – Intégrale d'une fonction continue par morceaux

II Propriétés de l'intégrale — 23

III Primitives — 24

Ensemble des primitives d'une fonction – Intégrale fonction de sa borne supérieure – Primitives des fonctions usuelles

IV Méthodes pratiques — 26

Calcul d'intégrales – Dérivée d'une fonction définie par une intégrale

V Application au calcul de limites de certaines suites — 28

VI Formule de Taylor avec reste intégral — 29

Chapitre 4 — **Espaces vectoriels** — **Page 30**

I Structure d'espace vectoriel — 30

Règles de calcul dans un espace vectoriel – Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels – Sous-espaces vectoriels

II Familles libres, familles génératrices — 33

Combinaisons linéaires – Familles génératrices – Famille libre – Bases d'un espace vectoriel

III Somme de deux sous-espaces vectoriels — 37

Sous-espace vectoriel engendré par la réunion de deux sous-espaces vectoriels – Somme directe de sous-espaces vectoriels – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

IV Espaces vectoriels de dimension finie — 39

Existence de bases – Dimension d'un espace vectoriel – Caractérisation des bases – Sous-espaces vectoriels en dimension finie – Rang d'une famille finie de vecteurs

Chapitre 5 — **Développements limités** — **Page 43**

I Notion de développement limité — 43

Définition – Unicité d'un développement limité – Condition suffisante d'existence d'un développement limité – Développements limités usuels obtenus par la formule de Taylor-Young

II Opérations sur les développements limités 45
Développement limité d'une somme et d'un produit – Intégration terme à terme d'un développement limité – Développement limité d'une fonction composée – Développement limité au voisinage de $a \neq 0$

III Application des développements limités 47
Calcul de limites – Étude locale d'une fonction au voisinage d'un point – Recherche d'asymptotes obliques au voisinage de l'infini

Chapitre 6 Applications linéaires Page 51

I Généralités sur les applications linéaires 51
Définitions et premières propriétés – Opérations sur les applications linéaires – Rappels sur les applications injectives, surjectives et bijectives

II Image et noyau d'une application linéaire 52
Image d'une application linéaire – Image réciproque d'un ensemble par une application – Noyau d'une application linéaire

III Isomorphismes 54

IV Applications linéaires en dimension finie 55
Rang d'une application linéaire – Théorème du rang – Application à la caractérisation des isomorphismes

Chapitre 7 Applications linéaires et matrices Page 57

I Coordonnées d'un vecteur dans une base 57

II Matrice d'une application linéaire 57
Définition et exemples – Lien entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $M_{p,n}(\mathbb{K})$

III Changement de base 60
Matrice de passage – Effet d'un changement de base

IV Rang d'une matrice 61
Définition et propriétés – Calcul du rang

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capable de :

- déterminer des valeurs remarquables des fonctions arc sinus, arc cosinus et arc tangente,
- rappeler les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions arc sinus, arc cosinus et arc tangente,
- calculer des dérivées impliquant les fonctions arc sinus, arc cosinus et arc tangente.

Un résultat essentiel pour ce chapitre est le théorème ci-dessous vu au semestre précédent.

Théorème 1.1

Supposons que $f\colon I \to J$ (où I est un intervalle non vide non singulier de $\mathbb{R}$) est bijective et dérivable et que f' ne s'annule pas sur I. Alors, f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\forall y \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}.$$

I La fonction arc sinus

La fonction sinus n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cependant, elle l'est de $[-\pi/2;\pi/2]$ dans $[-1;1]$.

Définition 1.2. On appelle **arc sinus** et on note arcsin la bijection réciproque de la fonction :

$$\begin{array}{ccc} [-\pi/2;\pi/2] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \sin(x). \end{array}$$

Autrement dit, pour $y \in [-1;1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique angle compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont le sinus vaut y :

$$\forall y \in [-1;1], \quad \left(\arcsin(y) = x \iff \begin{cases} y = \sin x \\ x \in [-\pi/2;\pi/2] \end{cases}\right).$$

La fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & [-\pi/2;\pi/2] & \to & [-1;1] \\ & & x & \mapsto & \sin(x), \end{array}$$

étant continue et strictement croissante sur $[-\pi/2;\pi/2]$, sa bijection réciproque arcsin est également continue et strictement croissante sur $[-1;1]$. De plus, la dérivée de la fonction f ne s'annule pas sur $]-\pi/2;\pi/2[$ car :

$$\forall x \in]-\pi/2;\pi/2[, \quad f'(x) = \sin'(x) = \cos(x) > 0.$$

D'après le théorème 1.1, on en déduit que sa bijection réciproque arcsin est dérivable sur $]-1;1[$, et que

$$\forall y \in]-1;1[, \quad \arcsin'(y) = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(y)} = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}.$$

Or, pour tout $y \in]-1;1[$:

$$\left(\cos(\arcsin(y))\right)^2 = 1 - \left(\sin(\arcsin(y))\right)^2 = 1 - y^2,$$

donc

$$|\cos(\arcsin(y))| = \sqrt{1-y^2}.$$

Enfin, puisque $\arcsin(y)$ appartient à $]-\pi/2;\pi/2[$ et que la fonction cos est positive sur $]-\pi/2;\pi/2[$, on en déduit que :

$$\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}.$$

D'où

$$\forall y \in]-1;1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

La dérivée de arcsin est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$. Ainsi, la fonction arcsin elle-même est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.
En $-\pi/2$ et en $\pi/2$, la dérivée de la fonction sinus s'annule : la fonction arcsin présente donc en -1 et en 1 des demi-tangentes verticales.

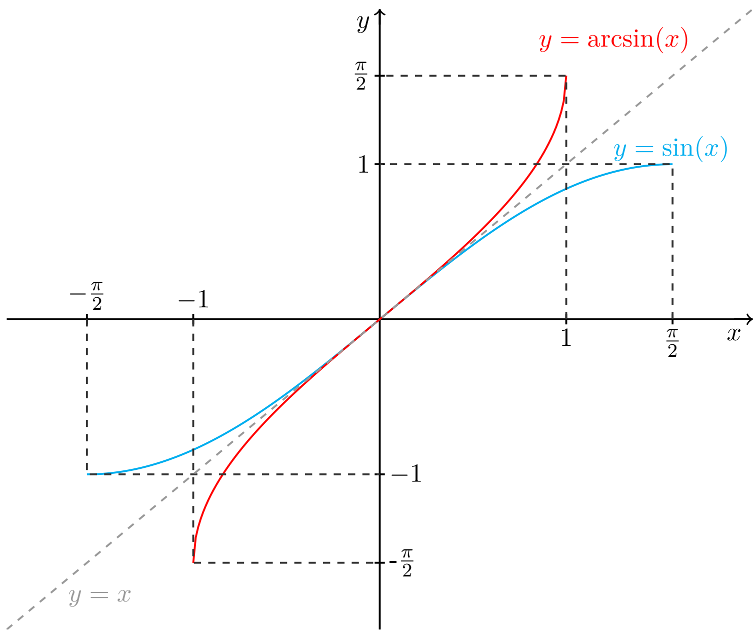
Proposition 1.3

La fonction arcsin est continue sur $[-1;1]$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et :

$$\forall y \in]-1;1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

De plus, la courbe représentative de arcsin présente aux points d'abscisses 1 et -1 des demi-tangentes verticales.

Illustration 1.4. Graphe des fonctions sinus et arc sinus.



II La fonction arccos

La fonction cosinus n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cependant, elle l'est de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$.

Définition 1.5. On appelle **arc cosinus** et on note arccos la bijection réciproque de la fonction :

$$\begin{array}{ccc} [0;\pi] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \cos(x). \end{array}$$

Autrement dit, pour $y \in [-1;1]$, $\arccos(y)$ est l'unique angle compris entre 0 et π dont le cosinus vaut y :

$$\forall y \in [-1;1], \quad \left(\arccos(y) = x \iff \begin{cases} y = \cos x \\ x \in [0;\pi] \end{cases} \right).$$

Proposition 1.6

La fonction arccos est continue sur $[-1;1]$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et :

$$\forall y \in]-1;1[, \quad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

De plus, la courbe représentative de arccos présente aux points d'abscisses 1 et -1 des demi-tangentes verticales.

Démonstration.
La fonction cos étant continue et strictement décroissante sur $[0;\pi]$, la fonction arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1;1]$.
De plus, la dérivée de la fonction cosinus ne s'annulant pas sur $]0;\pi[$, on en déduit, à l'aide du théorème 1.1, que arccos est dérivable sur $]-1;1[$, et que :

$$\forall y \in]-1;1[, \quad \arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos(y))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(y))}.$$

Or, pour tout $y \in]-1;1[$:

$$(\sin(\arccos(y)))^2 = 1 - (\cos(\arccos(y)))^2 = 1 - y^2,$$

donc

$$|\sin(\arccos(y))| = \sqrt{1-y^2}.$$

Par ailleurs, $\arccos(y) \in]0;\pi[$. La fonction sin étant positive sur $]0;\pi[$, on en déduit : $\sin(\arccos(y)) \geqslant 0$. D'où,

$$\sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}.$$

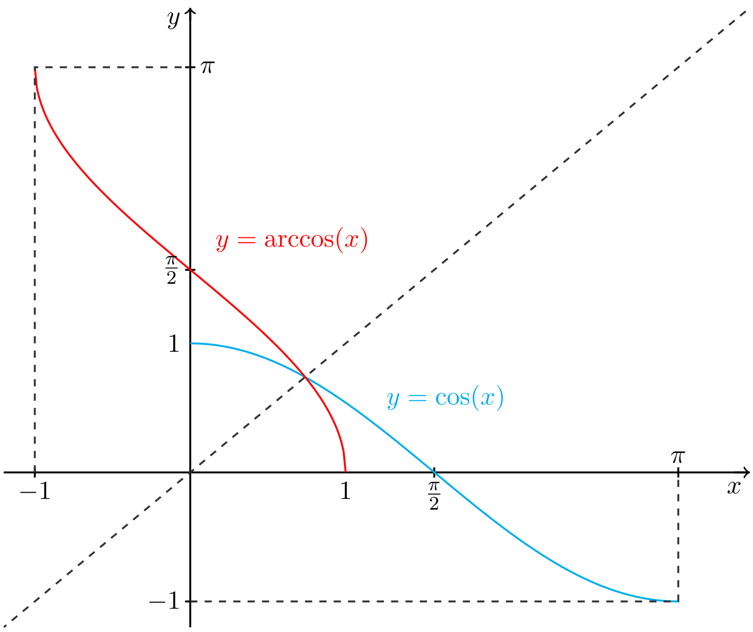
Finalement, on obtient :

$$\forall y \in]-1;1[, \quad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

La dérivée de arcsin est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$, il en est donc de même pour la fonction arcsin elle-même.
En 0 et en π, la dérivée de la fonction cosinus s'annule : la fonction arc cosinus présente donc en -1 et en 1 des demi-tangentes verticales.

□

Illustration 1.7. Graphe des fonctions cos et arccos.



III La fonction arc tangente

La fonction tangente n'est pas bijective. Mais sa restriction à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ est bijective.

Définition 1.8. On appelle arc tangente et on note arctan la bijection réciproque de la fonction :

$$\begin{array}{rcl}]-\pi/2;\pi/2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x). \end{array}$$

Autrement dit, pour $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y)$ est l'unique angle compris strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont la tangente vaut y :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \left(\arctan(y) = x \iff \begin{cases} y = \tan x \\ x \in]-\pi/2;\pi/2[\end{cases}\right).$$

Proposition 1.9

La fonction arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Démonstration. Notons f la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\pi/2;\pi/2[$:

$$f \; : \; \begin{array}{ccc}]-\pi/2;\pi/2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x). \end{array}$$

f est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2;\pi/2[$, donc sa bijection réciproque $\arctan = f^{-1}$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ (d'après le théorème de la bijection). D'autre part, la dérivée de f ne s'annule pas sur $]-\pi/2;\pi/2[$ car :

$$\forall x \in]-\pi/2;\pi/2[, \quad f'(x) = 1+\tan^2(x) > 0.$$

Donc d'après le théorème 1.1, la fonction $\arctan = f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

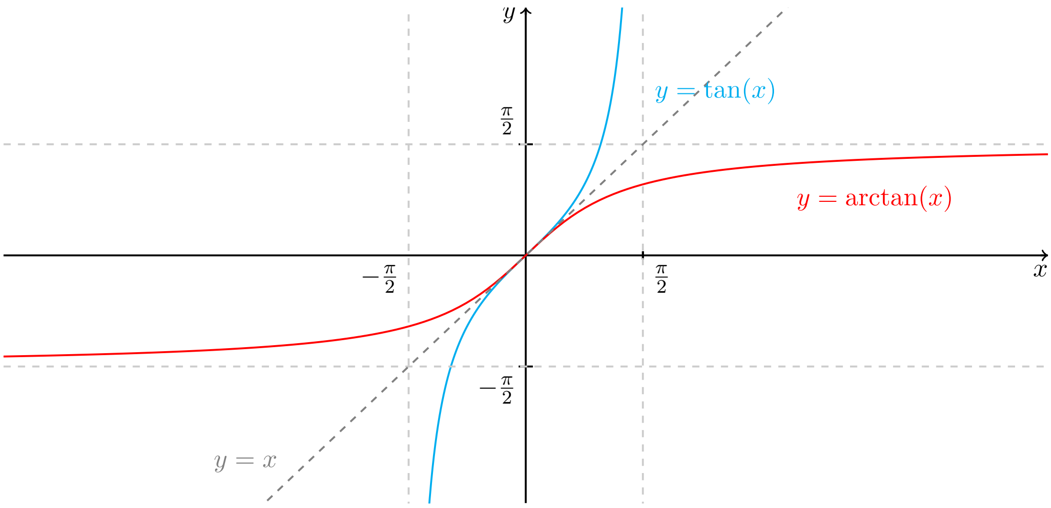
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = 1+\tan^2(\arctan(y)) = 1+y^2.$$

D'où :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

La dérivée de arctan est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction arctan elle-même est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. □

Illustration 1.10. Graphe des fonctions tan et arctan.



Propriété 1.11

La fonction arctan vérifie :

$$\lim_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}.$$

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capable de :

- résoudre des systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss,
- effectuer des sommes et produits de matrices,
- appliquer rigoureusement la formule du binôme de Newton sur les matrices,
- étudier l'inversibilité d'une matrice et déterminer son inverse le cas échéant,
- utiliser les propriétés des suites récurrentes pour déterminer la puissance n-ième d'une matrice.

I Systèmes linéaires

I.1 Reconnaître un système linéaire

Définition 2.1.
- Un **système linéaire de n équations à p inconnues** $x_1, x_2, \dots, x_p$ est un système d'équations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right.$$

  où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des nombres (réels ou complexes) donnés.
- On appelle **solution** de ce système tout p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie toutes les équations du système.

Exemple 2.2. Un exemple de système à deux équations et trois inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 12. \end{array}\right.$$

Proposition 2.3

Un système linéaire admet soit une solution unique, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Définition 2.4. On dit que deux systèmes linéaires sont **équivalents** lorsqu'ils ont les mêmes inconnues et les mêmes solutions.

I.2 Systèmes linéaires échelonnés

Définition 2.5. Un **système linéaire échelonné** est un système pouvant s'écrire sous forme «triangulaire» (quitte à renuméroter les inconnues) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + \dots + a_{1,p}x_p &=& b_1 \\ a_{2,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + \dots + a_{2,p}x_p &=& b_2 \\ \ddots \qquad\qquad & & \vdots \\ a_{n,n}x_n + \dots + a_{n,p}x_p &=& b_n \end{array}\right.$$

avec $p \geqslant n$. Les inconnues figurant en début de ligne (ici x_1, x_2, …, x_n) sont appelées **inconnues principales**. Les inconnues non principales sont appelées **inconnues auxiliaires**.

Exemple 2.6. Le système ci-dessous est échelonné :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 1. \end{array}\right.$$

Remarque 2.7. Pour résoudre un système linéaire échelonné, on exprime les inconnues principales en fonction des inconnues auxiliaires (si il y en a) en partant de la dernière équation, puis on remonte en effectuant des substitutions.

Exemple 2.8. Reprenons le système de l'exemple précédent. On exprime les solutions en fonction de z.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ \quad\quad y+z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+3(1-z)-z=0 \\ y=1-z \end{cases} \iff \begin{cases} x=(4z-3)/2 \\ y=1-z \end{cases} \iff \begin{cases} x=2z-3/2 \\ y=1-z. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par : $\left\{\left(2z-\frac{3}{2},1-z,z\right), z\in\mathbb{R}\right\}$.

Remarque 2.9. On aurait pu aussi choisir d'exprimer x et z en fonction de y. L'ensemble des solutions aurait alors été écrit différemment mais il aurait contenu exactement les mêmes éléments.

I.3 Le pivot de Gauss

Dans tout ce qui suit, nous noterons L_i la i-ème équation d'un système linéaire.

Théorème 2.10

Partant d'un système linéaire quelconque, on obtient un système linéaire équivalent en lui appliquant l'une des opérations suivantes :

(i) permutation de deux lignes L_i et L_j ($L_i \leftrightarrow L_j$),

(ii) multiplication d'une ligne L_i par $a\neq 0$ ($L_i \leftarrow aL_i$),

(iii) addition à une ligne L_i d'un multiple aL_j d'une autre ligne L_j ($L_i \leftarrow L_i + aL_j$).

Corollaire 2.11

Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné.

Lorsque l'on veut résoudre un système linéaire, on commence par échelonner ce système. Pour cela, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss décrit ci-dessous.

Méthode (Pivot de Gauss). Mettre en oeuvre l'algorithme du pivot de Gauss sur un système linéaire

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\ldots+a_{1,p}x_p=b_1, & L_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\ldots+a_{2,p}x_p=b_2, & L_2 \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\ldots+a_{n,p}x_p=b_n, & L_n \end{array}\right.$$

consiste à :

- **étape 1 :**
  - — si besoin, permuter deux inconnues ou effectuer une ou des opérations élémentaires sur les lignes du système (parmi celles présentées dans le théorème 2.10) pour que le nouveau coefficient $a'_{1,1}$ devant la nouvelle première inconnue x'_1 soit non nul (et si possible égal à 1). On transforme dans ce cas le système (S) en un nouveau système équivalent :

$$(S')\ :\ \left\{\begin{array}{ll} a'_{1,1}x'_1+a'_{1,2}x'_2+\ldots+a'_{1,p}x'_p=b'_1, & L_1 \\ a'_{2,1}x_1+a'_{2,2}x'_2+\ldots+a'_{2,p}x_p=b'_2, & L_2 \\ \vdots & \\ a'_{n,1}x'_1+a'_{n,2}x'_2+\ldots+a'_{n,p}x'_p=b'_n, & L_n. \end{array}\right.$$

    La nouvelle ligne L_1 ainsi obtenue est appelée **pivot**.
  - — utiliser la ligne pivot L_1 par des opérations élémentaires du type $L_i \leftarrow a'_{1,1}L_i - a'_{i,1}L_1$ pour annuler le coefficient devant l'inconnue x'_1 dans toutes les autres équations à partir de la deuxième équation (pour $i\in\{2,\ldots,n\}$). Le système (S) initial est alors équivalent à un nouveau système de la forme

$$(S'')\ :\ \left\{\begin{array}{lll} a'_{1,1}x'_1+ & a'_{1,2}x'_2+\ldots+a'_{1,p}x'_p=b'_1, & L_1 \\ & a''_{2,2}x'_2+\ldots+a''_{2,p}x_p=b''_2, & L_2 \\ & \vdots & \\ & a''_{n,2}x'_2+\ldots+a''_{n,p}x'_p=b''_n, & L_n. \end{array}\right.$$

- **étape 2 :** répéter l'étape 1 sur le sous-système

$$\left\{\begin{array}{l} a''_{2,2}x'_2 + \ldots + a''_{2,p}x_p = b''_2, \\ \vdots \\ a''_{n,2}x'_2 + \ldots + a''_{n,p}x'_p = b''_n, \end{array}\right.$$

en laissant la ligne L_1 de (S'') inchangée.
- poursuivre cet algorithme jusqu'à voir apparaître une incompatibilité (dans le cas d'un système n'ayant pas de solution) ou jusqu'à obtenir un système échelonné.

Exemple 2.12. Mettons en oeuvre l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre le système suivant :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 1. \end{array}\right.$$

On a :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & 3 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 6y & - & 3z & = & 0 \quad L_2 \leftarrow 3L_2 \\ & & 6y & - & 2z & = & 6 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 6y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & z & = & 6 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2. \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{r} x = 2 - 2y - z = -10 \\ y = 3z/6 = 3 \\ z = 6 \end{array}\right. \iff (x, y, z) = (-10, 3, 6).$$

On en déduit que le système admet une unique solution qui est $(-10, 3, 6)$.

Attention. Lorsque l'on applique la méthode du pivot de Gauss, il est **impératif** d'écrire les équivalences entre les systèmes ainsi que les opérations effectuées sur les lignes d'une étape à l'autre comme dans l'exemple précédent.

1 Résoudre le système $\begin{cases} -2x + y + z + 7t = 1 \\ x + 3y + 3z + 7t = 10 \\ x + 2y + 2z + 4t = 7 \\ y + z + 3t = 3. \end{cases}$

II Matrices rectangulaires

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 L'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2.13. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. Une **matrice** à n lignes et à p colonnes (appelée aussi matrice de taille $n \times p$) est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes et noté sous la forme :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ième colonne est noté $a_{i,j}$ et est appelé **terme général** de la matrice A. L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 2.14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 2.15. On appelle :

i) **matrice ligne** tout élément de $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$,

ii) **matrice colonne** tout élément de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

iii) **matrice nulle** de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice notée $0_{n,p}$ dont tous les éléments sont nuls.

II.2 Opérations sur les matrices

Définition 2.16. Soit $(A, B) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. On appelle **somme** de A et B la matrice C de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée $A + B$ et dont le terme général est donné par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Remarque 2.17. Il s'agit en fait tout simplement de la somme coefficient par coefficient.

Exemple 2.18. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+2 & 0+1 \\ 0+1 & (-1)+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Définition 2.19. Soit $(\lambda, A) \in \mathbb{K} \times \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **produit** de A par λ la matrice C de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée λA et dont le terme général est donné par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

Remarque 2.20. La matrice λA est obtenue en multipliant tous les coefficients de la matrice A par λ.

Exemple 2.21. On a :

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 0 \\ 3 \times 0 & 3 \times (-1) \\ 3 \times 2 & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Propriétés 2.22. Soient $(A, B, C) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

i) $A + B = B + A$

ii) $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$

iii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

iv) $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$

v) $1 \times A = A$

vi) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

vii) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

viii) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

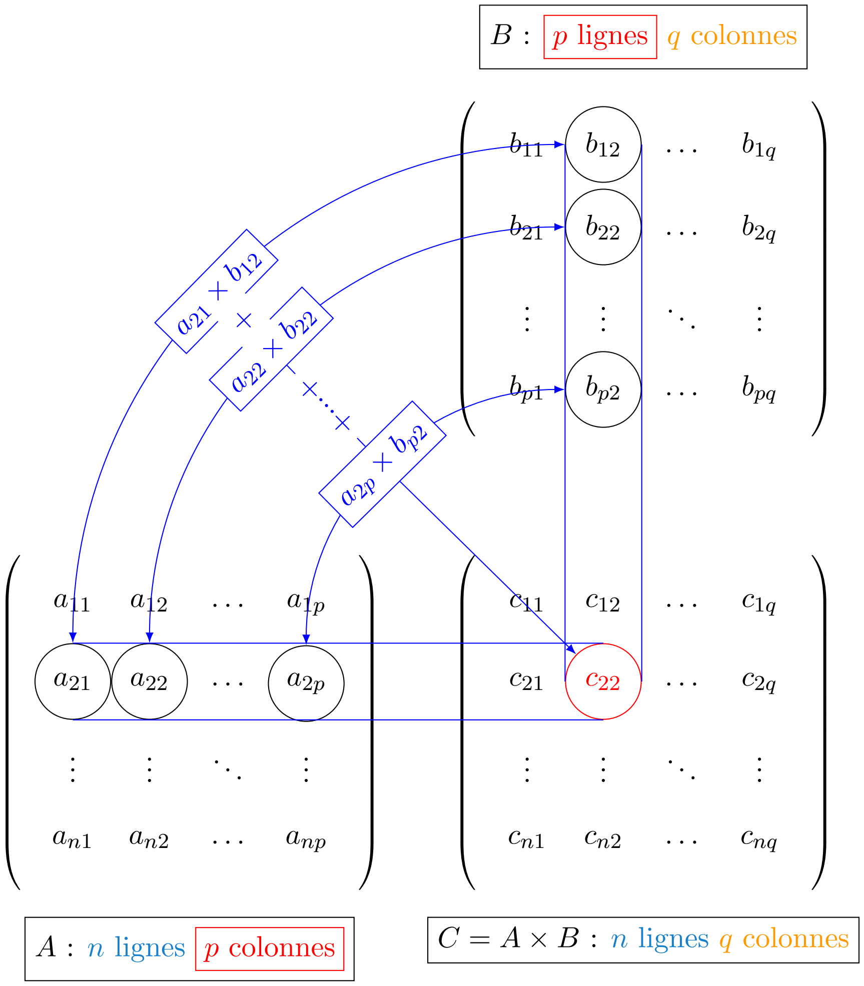
Définition 2.23. Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ une matrice de $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le **produit** de A par B, noté AB, est la matrice $(c_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ de $\mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont le terme général est défini par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque 2.24. On ne peut pas en général multiplier deux matrices, il faut faire attention à leurs tailles respectives. De plus, il se peut que le produit AB ait un sens alors que BA n'en a pas. Pour se souvenir du cas où le produit de deux matrices est bien défini, on peut voir l'opération "produit" comme une application de l'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans l'ensemble $\mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ (les p "se simplifient") :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \mapsto & AB. \end{array}$$

Illustration 2.25. Voici comment calculer le coefficient $c_{2,2}$ de la définition précédente.



Exemple 2.26. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 1 + 0\times 2 & 1\times 2 + 2\times(-3) + 0\times 2 \\ 0\times 1 + (-1)\times 1 + 2\times 2 & 0\times 2 + (-1)\times(-3) + 2\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2 On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les produits AB et BA. Que remarque-t-on ?
2. Calculer les produits AB et AC. Que remarque-t-on ?

Remarque 2.27. Lorsque les produits AB et BA ont un sens, on a, en général, $AB \neq BA$.

Propriété 2.28. Soient A, B et C trois matrices. Lorsque les produits suivants ont un sens et que 0 désigne la matrice nulle de la dimension adéquate,

(i) $A(B+C) = AB + AC$,
(ii) $(A+B)C = AC + BC$,
(iii) $A0 = 0$,
(iv) $0A = 0$,
(v) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,
(vi) $A(BC) = (AB)C$,

II.3 Transposée d'une matrice

Définition 2.29. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La **transposée** de A, notée ${}^tA$, est la matrice dont le terme général $(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est défini par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Remarque 2.30. Pour obtenir ${}^tA$, il suffit de transformer les lignes de A en des colonnes.

Exemple 2.31. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.32

Soient A et B deux matrices et $\lambda \in \mathbb{K}$. Lorsque les opérations ci-dessous ont un sens (i.e. quand les tailles des matrices sont compatibles avec les opérations), on a les égalités :

(i) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$,

(ii) ${}^t({}^tA) = A$,

(iii) ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$,

(iv) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

II.4 Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 2.33. Considérons le système :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2, \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n. \end{cases}$$

La **matrice du système** est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.34. Avec les notations de la définition précédente, le système (S) est équivalent à $AX = B$ où :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.35. La matrice du système $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

III Matrices carrées

III.1 Quelques matrices remarquables

Définition 2.36. Une **matrice carrée d'ordre** n est une matrice de $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Pour simplifier, on note $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices. On note aussi 0_n la matrice carrée nulle d'ordre n.

Exemple 2.37. Un exemple de matrice carrée d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 2.38. La **matrice identité** de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice notée I_n ayant des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.39. Pour $n = 3$, la matrice identité correspondante est : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.40

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors : $AI_n = I_nA = A$.

3 Vérifier que la proposition précédente fonctionne avec une matrice 3×3 non triviale A de votre choix.

Définition 2.41. Une matrice est dite **diagonale** si tous ses coefficients en-dehors de la diagonale sont nuls.

Exemple 2.42. La matrice identité est diagonale. La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonale.

4 Effectuer le produit matriciel suivant : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Que remarque-t-on ?

Proposition 2.43

Le produit de deux matrices diagonales de même dimension est une matrice diagonale.

Définition 2.44. Une matrice A est dite **symétrique** si $A = {}^tA$.

Remarque 2.45. On reconnaît une matrice symétrique par le fait que ses coefficients sont symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple 2.46. La matrice suivante est symétrique : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5 Démontrer que la somme de deux matrices symétriques de même dimension est une matrice symétrique.

Définitions 2.47. On dit qu'une matrice est **triangulaire supérieure** si tous ses coefficients en-dessous de la diagonale sont nuls. On définit de manière similaire une matrice **triangulaire inférieure**.

Exemple 2.48. La matrice suivante est triangulaire supérieure : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6 Effectuer le produit matriciel suivant : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Que remarque-t-on ?

III.2 Puissances d'une matrice

Définition 2.49. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On définit les **puissances** de A (par récurrence) de la façon suivante :

$$\begin{cases} A^0 = I_n, \\ A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p \text{ fois}} = A^{p-1} \times A. \end{cases}$$

Proposition 2.50

Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :
(i) $A^{p+q} = A^p A^q$;
(ii) $(A^p)^q = A^{pq}$;
(iii) $(\lambda A)^p = \lambda^p A^p$.

Attention. En général, $(AB)^p \neq A^p B^p$. De même, les identités remarquables ne sont plus valables. On doit écrire :
$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

7 Pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, déterminer A^p où A est la matrice diagonale : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Théorème 2.51 (Formule du binôme)

Soient $(A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $N \in \mathbb{N}$. Si $AB = BA$, alors : $(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$.

III.3 Matrices inversibles

Définition 2.52. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** si : $\exists B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB = BA = I_n$. L'ensemble des matrices inversibles est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 2.53

Lorsqu'elle existe, la matrice B de la définition précédente est unique. On la note A^{-1} et on l'appelle matrice inverse de A.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 2.54. La matrice identité est inversible et $I_n^{-1} = I_n$. En effet : $I_n I_n = I_n I_n = I_n$.

8 Soit A une matrice diagonale. À quelle condition suffisante A est-elle inversible ?

Théorème 2.55

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) A est inversible ;
(ii) $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$, $AB = I_n$;
(iii) $\exists C \in M_n(\mathbb{K})$, $CA = I_n$.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, alors les matrices B et C des points (i) et (ii) sont égales à l'inverse de A : $B = A^{-1}$ et $C = A^{-1}$.

Proposition 2.56

Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

(i) Si A est inversible, alors A^{-1} l'est aussi et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

(ii) Si A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 2.57

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si pour tout $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ l'équation $AX = X_0$, d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ admet une unique solution. Dans ce cas, cette unique solution est donnée par $X = A^{-1}X_0$.

Cette proposition nous donne une première méthode d'étude de l'inversibilité d'une matrice et de calcul de son inverse le cas échéant.

Méthode (Calcul de l'inverse par résolution de système). Pour étudier si une matrice carrée A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

est inversible, on se donne une matrice colonne **quelconque** à n lignes $X_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ \vdots \\ x_{0,n} \end{pmatrix}$ et on résout l'équation matricielle $AX = X_0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (matrice colonne formée de n inconnues x_1, x_2, ..., x_n réelles ou complexes). Pour cela, on explicite le produit AX de sorte à réécrire l'équation $AX = X_0$ sous la forme d'un système de n équations à n inconnues :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = x_{0,1} \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = x_{0,2} \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = x_{0,n}. \end{cases}$$

Deux cas se présentent alors :

- soit il existe au moins une matrice colonne X_0 pour laquelle (S) n'admet pas de solution ou (S) admet une infinité de solutions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: dans ce cas la matrice A n'est pas inversible ;
- soit **pour toute** matrice colonne X_0, le système (S) admet une **unique** solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: on exprime alors cette unique solution en fonction des paramètres $x_{0,1}$, $x_{0,2}$,...,$x_{0,n}$ sous la forme

$$(S') \quad \begin{cases} x_1 = b_{1,1}x_{0,1} + b_{1,2}x_{0,2} + \ldots + b_{1,n}x_{0,n} \\ x_2 = b_{2,1}x_{0,1} + b_{2,2}x_{0,2} + \ldots + b_{2,n}x_{0,n} \\ \vdots \\ x_n = b_{n,1}x_{0,1} + b_{n,2}x_{0,2} + \ldots + b_{n,n}x_{0,n}. \end{cases}$$

  On réécrit ensuite le système (S') sous forme matricielle $X = BX_0$ où

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

  La proposition précédente permet d'en conclure que A est inversible et que $A^{-1} = B$.

Exemple 2.58. Inversons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Résolvons l'équation $AX = X_0$.

$$AX = X_0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x+z \\ x+2y+2z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & x_0 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & y_0 \\ & & y & + & z & = & z_0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & y_0 \\ x & & & + & z & = & x_0 \\ & & y & + & z & = & z_0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & y_0 \\ & - & 2y & - & z & = & x_0 \\ & & y & + & z & = & z_0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & y_0 \\ & - & 2y & - & z & = & x_0 \\ & & & & z & = & x_0 - y_0 + 2z_0 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & -2x_0+3y_0-4z_0 \\ -2y & = & 2x_0-2y_0+2z_0 \\ z & = & x_0-y_0+2z_0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y_0-2z_0 \\ y & = & -x_0+y_0-z_0 \\ z & = & x_0-y_0+2z_0 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0-2z_0 \\ -x_0+y_0-z_0 \\ x_0-y_0+2z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$AX = X_0 \iff X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X_0.$$

D'après la proposition 2.57, on en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9 Déterminer si la matrice A suivante est inversible : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Corollaire 2.59

Considérons un système linéaire écrit sous forme matricielle : $AX = B$, où $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Ce système admet une unique solution ssi A est inversible. Si tel est le cas, alors la solution est donnée par : $X = A^{-1}B$.

Exemple 2.60. Résolvons :

$$(S)\ :\ \begin{cases} x+z=1, \\ x+2y+2z=0, \\ y+z=3. \end{cases}$$

La matrice du système est $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a vu dans l'exemple 2.58 que A est inversible et que $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi, (S) admet une unique solution qui est donnée par :

$$X=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Voici, ci-dessous, une autre méthode de recherche de l'inversibilité d'une matrice et de détermination de son inverse le cas échéant. il s'agit simplement d'une réécriture sous forme matricielle et non sous forme de systèmes de la méthode précédente.

Méthode (Calcul de l'inverse par l'algortihme du pivot de Gauss - "méthode du miroir"). On effectue un algorithme du pivot de Gauss sur les lignes de la matrice A jusqu'à obtenir une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure). Deux cas se présentent :

- soit la matrice triangulaire obtenue comporte un ou plusieurs zéros sur sa diagonale, auquel cas la matrice A n'est pas inversible ;
- soit la matrice triangulaire obtenue ne comporte que des coefficients diagnonaux non nuls, auquel cas, on effectue de nouveau des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice, jusqu'à obtenir la matrice identité.

Toutes les opérations qui ont été faites sur les lignes de la matrice A doivent être faites **parallèlement** sur la matrice identité. La matrice obtenue à la fin du processus en partant de la matrice identité est alors A^{-1}.

Exemple 2.61. Reprenons la matrice A de l'exemple 2.58 en utilisant cette méthode.

$$\begin{array}{ccc}
A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2-L_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftrightarrow L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3-2L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow -L_3 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3 & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1-L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2-L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=A^{-1}
\end{array}$$

On retombe bien sur la même expression pour A^{-1} que celle obtenue par la première méthode.

Attention. Lorsqu'on pense avoir trouvé la matrice inverse A^{-1}, il peut être judicieux de vérifier rapidement par calcul que le produit AA^{-1} donne bien la matrice identité. Cela permet de déceler une éventuelle erreur de calcul dans la recherche de A^{-1}.

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capable de :

- rappeler les primitives des fonctions usuelles,
- calculer une intégrale en reconnaissant une primitive simple,
- rappeler la formule d'intégration par parties,
- calculer une intégrale par intégration par parties,
- calculer une intégrale par un changement de variable donné,
- intégrer des inégalités,
- étudier une fonction définie par une intégrale,
- utiliser les sommes de Riemann pour calculer la limite de certaines suites.

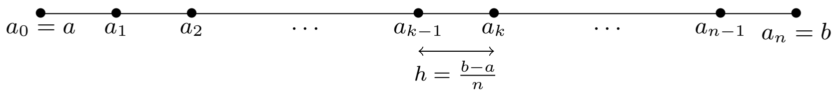
I Sommes de Riemman

Sauf mention contraire, dans tout ce chapitre, a et b sont deux réels tels que $a < b$ et f désigne une fonction définie sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et note $(a_0, \cdots, a_n)$ les nombres réels définis par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}.$$



Définition 3.1. Pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, soit ξ_k un réel quelconque dans l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$. On considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On appelle **somme de Riemann** de f associée à la famille de points $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_{n-1})$ la quantité :

$$S_n^{\xi}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k).$$

Théorème 3.2

Si f est continue sur $[a, b]$, alors pour toute famille de points $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_{n-1})$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$:

(i) la suite des sommes de Riemann $\left(S_n^{\xi}(f)\right)_n$ converge ;

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{\xi}(f)$ ne dépend pas de la suite de points $(\xi_0, \cdots, \xi_{n-1})$ choisie.

Définition 3.3. Pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, on appelle **intégrale** de f sur le segment $[a, b]$, et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, la limite de la suite formée par les sommes de Riemann de f, i.e.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k),$$

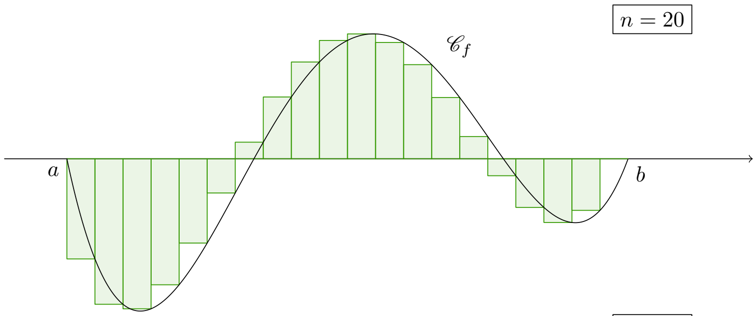
où $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque vérifiant $a_k \leqslant \xi_k \leqslant a_{k+1}$, avec $a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$.

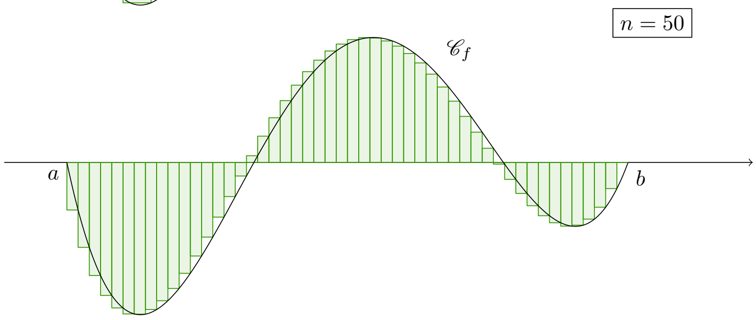
On peut choisir ξ_k comme étant l'une des deux bornes de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$. Par exemple, en choisissant pour chaque ξ_k la borne supérieure de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ (i.e. $\xi_k = a_{k+1}$), on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.4

Si f est continue sur $[a,b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$.

Illustration 3.5. La quantité $\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ correspond à l'aire colorée ci-dessous pour différentes valeurs de n. L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ est la limite lorsque $n\to+\infty$ de la somme des aires des rectangles. On remarque alors que l'intégrale de f correspond à l'aire algébrique de la surface située entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

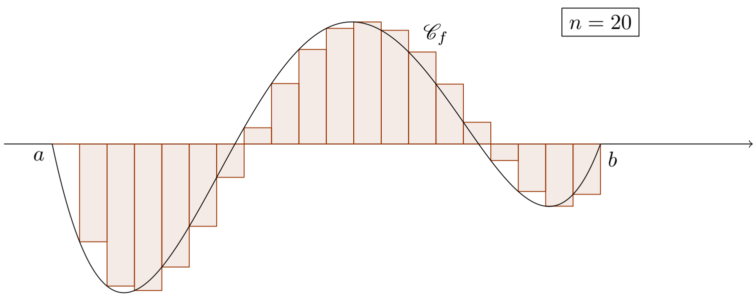




Remarque 3.6. De la même manière, en choisissant dans la définition 3.3 pour chaque ξ_k la borne inférieure de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ (i.e. $\xi_k = a_k$), on obtient le résultat suivant : si f est continue sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Cette fois, la quantité $\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ correspond à l'aire colorée ci-dessous :



$\boxed{10}$ On considère l'application $f : [0,10] \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x\in[0,10],\ \ f(x)=x$. Soient $n\in\mathbb{N}^\star$, $a=0$ et $b=10$. Simplifier l'expression $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{10} x\ \mathrm{d}x$.

I.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

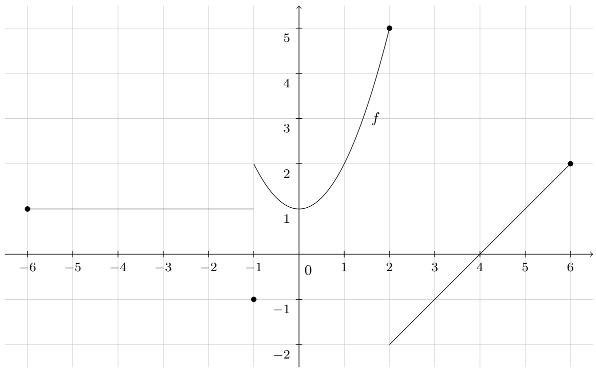
Définition 3.7. Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe des points $(x_0, x_1, \dots, x_p)$ du segment $[a,b]$ telle que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, f soit continue sur $]x_k, x_{k+1}[$ et telle que f admette en chacun des points $x_0, x_1, \dots, x_p$ une limite finie à droite et à gauche.

Exemple 3.8. (i) Une fonction continue est continue par morceaux.

(ii) Les fonctions en escalier sont continues par morceaux.

(iii) La fonction f définie ci-dessous est continue par morceaux sur $[-6, 6]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-6, -1[, \\ -1, & \text{si } x = -1, \\ 1 + x^2, & \text{si } x \in]-1, 2], \\ x - 4, & \text{si } x \in]2, 6]. \end{cases}$$



(iv) La fonction inverse n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}^\star$ car elle n'admet pas de limite fini à droite et à gauche de 0.

Définition 3.9. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. On désigne par $(x_0, x_1, \cdots, x_p)$ les points de discontinuité de f. Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, on note $f_k = f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ la restriction de f à l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ et on note $\widetilde{f_k}$ le prolongement par continuité de f_k au segment $[x_k, x_{k+1}]$. On définit l'**intégrale** de f sur le segment $[a,b]$ comme étant la quantité

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \widetilde{f_k}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 3.10. Pour calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on somme les intégrales de f sur chacun des intervalles où elle est continue.

11 Tracer le graphe de la fonction $f : [-1, 11] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [-1, 0[, \\ x & \text{si } x \in [0, 10], \\ -1 & \text{si } x \in]10, 11[, \\ 0 & \text{si } x = 11. \end{cases}$ puis calculer $\displaystyle\int_{-1}^{11} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Définition 3.11. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Par convention, on pose :

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

II Propriétés de l'intégrale

Proposition 3.12 (Linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels dans I. On a :

(i) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$

(ii) $\displaystyle\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Proposition 3.13 (Positivité de l'intégrale)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ avec $a \leqslant b$. On a :

$$\Big(\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant 0\Big) \quad \Longrightarrow \quad \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0\right).$$

Corollaire 3.14 (Intégration d'une inégalité)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. On a :

$$\Big(\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant g(x)\Big) \quad \Longrightarrow \quad \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right).$$

Corollaire 3.15 (Inégalité triangulaire)

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

Proposition 3.16 (Relation de Chasles)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors pour tous réels a, b et c dans I, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$

Théorème 3.17 (Positivité stricte)

Si f est **continue** et **positive** sur $[a,b]$ avec $a < b$ et que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors : $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$.

Proposition 3.18 (Formule de la moyenne)

Si f est **continue** sur $[a,b]$, alors il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(c).$

III Primitives

III.1 Ensemble des primitives d'une fonction

Définition 3.19. Soient I un **intervalle** non vide $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

12 Déterminer deux primitives de la fonction $x \mapsto 3 + x - x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.20

Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet une primitive F, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions $F_C : I \to \mathbb{R}$ définies par : $\forall x \in I, \quad F_C(x) = F(x) + C$.

Remarque 3.21. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Pour trouver toutes les primitives d'une fonction, il suffit donc de n'en trouver qu'une seule.

13 Trouver toutes les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} - 2x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Corollaire 3.22

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive sur l'intervalle I. Soient $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors, il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(a) = b$.

Démonstration. Exercice (indication : partir d'une primitive G de f et chercher la bonne constante à lui ajouter pour construire F). □

III.2 Intégrale fonction de sa borne supérieure

III.2.1 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 3.23

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur un intervalle I et a un point de I. La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en $x = a$.

Exemple 3.24. La fonction $\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t \end{array}$ est l'unique primitive sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en $x = 1$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. C'est la fonction **logarithme népérien**.

Corollaire 3.25 (Existence de primitives)

Toute fonction **continue** sur un intervalle y admet des primitives.

III.3 Primitives des fonctions usuelles

Ci-dessous vous trouverez une primitive de chacune des fonctions usuelles présentées dans la première colonne.

Fonction $x \mapsto \cdots$	Intervalle	**Une** primitive : $x \mapsto \cdots$
$x^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^n, \quad n \in \mathbb{Z}_-^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$\ln(x)$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$\arcsin(x)$

Remarque 3.26. Lorsqu'on vous demande de déterminer **les** primitive**s** d'une fonction, il faudra vous souvenir que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. On écrira donc par exemple :
"Les primitives de $x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \sin(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$."

14 Déterminer les primitives sur $]0, +\infty[$ des fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

Rappel 3.27. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J, et que f est une fonction dérivable sur J, alors la fonction composée $f \circ u$ est dérivable sur I et

$$(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u).$$

En particulier, si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ln \circ u$ est dérivable sur I, de dérivée $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction $x \mapsto \cdots$	**Une** primitive	Remarques
$u'f'(u)$	$f(u)$	On suppose que u est valeurs dans un intervalle J sur lequel f est dérivable.
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	On suppose que u ne s'annule pas sur I.
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	On suppose que $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ et que u ne s'annule pas sur I lorsque $n \leqslant -2$.
$u'u^\alpha$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	On suppose que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que u est à valeurs dans $]0, +\infty[$.

15 Donner une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, de $u'u$ et de $u'\sin(u)$.

IV Méthodes pratiques

IV.1 Calcul d'intégrales

IV.1.1 Utilisation d'une primitive

Théorème 3.28 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Pour tous réels a et b dans I, on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Remarque 3.29. On note $\big[F\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

16 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

IV.1.2 Intégration par parties

Théorème 3.30

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tous réels a et b dans I, on a

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

17 En remarquant que $\arctan(t) = \underbrace{1}_{u'(t)} \times \underbrace{\arctan(t)}_{v(t)}$, calculer $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout réel x.

IV.1.3 Changement de variable

Théorème 3.31

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\alpha, \beta]$ (avec $\alpha < \beta$) à valeurs dans I. Alors, on a :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Méthode (Méthode de calcul d'intégrale par changement de variable). En pratique pour calculer une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ avec un changement de variable, on procède de la façon suivante :

1) on pose $x = \varphi(t)$ où $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$,
2) on calcule $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$,
3) on détermine les nouvelles bornes d'intégration α et β telles que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$,
4) on peut alors écrire

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 3.32. À l'aide du changement de variable $x = t^2$, calculons l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}\mathrm{d}x.$$

1) Pour $t \geqslant 0$, on pose $\varphi(t) = t^2$ et on considère le changement de variable $x = \varphi(t)$.
2) La fonction φ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, on calcule le "nouveau dx" : $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t = 2t\mathrm{d}t$.
3) On remarque que $0 = \varphi(0)$ et que $\frac{1}{4} = \varphi(\frac{1}{2})$.
4) Ainsi, l'intégrale peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\varphi(t) - \varphi(t)^2}}2t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{t^2 - t^4}}2t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\mathrm{d}t.$$

On a donc :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin'(t)\mathrm{d}t = \Big[\arcsin(t)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Exemple 3.33. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x^2 - 1}$, déterminons :

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\mathrm{d}x.$$

1) On remarque que : $t = \sqrt{x^2 - 1} \implies t^2 = x^2 - 1 \implies x^2 = t^2 + 1 \implies x = \pm\sqrt{t^2 + 1}$.
   Or, $x \in [\sqrt{2}, 2]$, donc $x \geqslant 0$. On peut donc utiliser le changement de variable : $x = \sqrt{t^2 + 1}$.
2) Par composition, la fonction φ définie par $\varphi(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\varphi'(t) = \dfrac{2t}{2\sqrt{t^2 + 1}} = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$. On peut donc écrire : $\mathrm{d}x = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}\mathrm{d}t$.
3) Pour déterminer les nouvelles bornes d'intégration, on remarque que :

$$x = \sqrt{2} \iff t = \sqrt{\sqrt{2}^2 - 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad x = 2 \iff t = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}.$$

4) Par changement de variable, $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}\,t} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + 1}\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\mathrm{d}x = \Big[\arctan(t)\Big]_1^{\sqrt{3}} = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

18 À l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

IV.2 Dérivée d'une fonction définie par une intégrale

Méthode (Dérivation d'une fonction définie par une intégrale). Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $[a,b]$. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour dériver la fonction ci-dessous, on procède en plusieurs étapes :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

1. On justifie que f admet une primitive F sur $[a,b]$ car elle y est continue.
2. On réécrit la fonction φ à l'aide de F :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} F'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x)).$$

3. On en déduit la dérivabilité de φ et le calcul de φ' à l'aide des formules usuelles.

Remarque 3.34. Cette méthode permet dans certains cas de calculer la dérivée d'une fonction définie par une intégrale sans connaître explicitement une primitive de la fonction à intégrer.

Exemple 3.35. On considère la fonction ci-dessous dont on souhaite déterminer les variations :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{0}^{x^2} \exp\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

La fonction $t \mapsto \exp\left(\sqrt{t}\right)$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, elle y admet une primitive que l'on notera F par la suite. Cette primitive vérifie donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad F'(t) = \exp\left(\sqrt{t}\right)$. On en déduit que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \varphi(x) = \int_0^{x^2} F'(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_0^{x^2} = F(x^2) - F(0).$$

Ainsi, φ est dérivable comme composée de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \varphi'(x) = 2xF'(x^2) - 0 = 2x\exp\left(\sqrt{x^2}\right) = 2x\exp(|x|).$$

Puisque la fonction exponentielle est positive, on en conclut que la fonction φ est décroissante sur $[-1,0]$ et croissante sur $[0,1]$.

19 Étudier le sens de variations de la fonction $\begin{array}{rccc} \varphi & : &]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t. \end{array}$

V Application au calcul de limites de certaines suites

Le corollaire 3.4 permet de calculer les limites de suites définies comme des sommes de Riemman de fonctions continues.

Exemple 3.36. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. On peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où f est la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

20 Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{n}$.

VI Formule de Taylor avec reste intégral

Remarque 3.37. D'après le théorème 3.28, si est f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ alors pour tout $x \in [a,b]$: $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$. Le théorème ci-dessous est une généralisation de ce résultat.

Théorème 3.38

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle non vide et $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, alors, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. Ce théorème se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'étape d'initialisation (pour $n = 0$) est une simple conséquence du théorème 3.28 appliqué à la fonction f'. $\square$

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capable de :

- démontrer qu'un sous-ensemble est/n'est pas un sous-espace vectoriel,
- démontrer qu'une famille de vecteurs donnée est libre/liée/génératrice/une base,
- déterminer une famille génératice d'un espace vectoriel,
- déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel,
- déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base,
- calculer le rang d'une famille de vecteurs,
- utiliser la formule de Grassmann pour calculer la dimension d'un espace-vectoriel,
- démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe/supplémentaires.

I Structure d'espace vectoriel

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

I.1 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Définition 4.1. On appelle **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$**-e.v.** tout triplet $(E, +, .)$ où E est un ensemble non vide muni de deux opérations (encore appelées **lois**) :

- une **loi interne**, notée $+$ et appelée addition,

$$+ \ : \ \begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

  vérifiant les propriétés suivantes :

  (A1) $\forall (u,v)\in E^2, \quad u+v=v+u,$ *commutativité de l'addition*

  (A2) $\forall (u,v,w)\in E^3, \quad u+(v+w)=(u+v)+w,$ *associativité de l'addition*

  (A3) $\exists e\in E,\ \forall u\in E, \quad e+u=u+e=u,$ *élément neutre pour l'addition*

  (A4) $\forall u\in E,\ \exists v\in E, \quad u+v=v+u=e,$ *symétrique pour l'addition*

- une **loi externe**, notée . et appelée multiplication par les nombres (réels si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou complexes si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$),

$$\cdot \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,u) & \mapsto & \lambda\cdot u \end{array}$$

  vérifiant les propriétés suivantes :

  (M1) $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall u\in E, \quad (\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u,$ *distributivité de la multiplication sur l'addition des scalaires*

  (M2) $\forall \lambda\in\mathbb{K},\ \forall (u,v)\in E^2, \quad \lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v,$ *distributivité de la multiplication sur l'addition des vecteurs*

  (M3) $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall u\in E, \quad (\lambda\mu)\cdot u=\lambda\cdot(\mu\cdot u),$ *associativité mixte*

  (M4) $\forall u\in E, \quad 1\cdot u=u.$ *élément neutre pour la multiplication externe*

Les éléments de E sont alors appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ des **scalaires**.

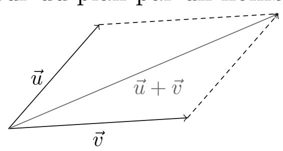
Remarques 4.2.

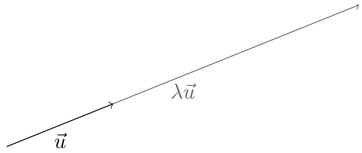
- Souvent, on écrit la multiplication externe par les scalaires λu au lieu de $\lambda\cdot u$.
- Si $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., alors :
  — l'élément e de l'axiome (A3) est unique ; il est noté 0_E et est appelé **vecteur nul de** E,
  — pour tout $u\in E$, l'élément $v\in E$ de l'axiome (A4) est l'unique élément de E tel que $u+v=v+u=0_E$; il est noté $-u$ et est appelé l'**opposé** de u.
  — on note, pour tout $(u,v)\in E^2$, $u-v$ au lieu de $u+(-v)$.

Exemples 4.3.

- L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de l'addition $+$ et de la multiplication $\times$ usuelles des nombres réels est un $\mathbb{R}$-e.v. : $(\mathbb{R},+,\times)$. En revanche, les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}$ munis des mêmes opérations ne sont pas des $\mathbb{R}$-e.v. car ils ne sont pas stables pour la multiplication par les scalaires de $\mathbb{R}$: le nombre $u=1$ vérifie bien $u\in\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$, pourtant son produit $\pi\times u=\pi$ par le scalaire $\pi\in\mathbb{R}$ n'est pas un élément de $\mathbb{Q}$ (donc ni de $\mathbb{Z}$, ni de $\mathbb{N}$). On dit que ces ensembles ne sont pas **stables** par multiplication par un scalaire.

- L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes muni de l'addition usuelle des complexes et de la multiplication externe par les nombres réels $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (\lambda, z) & \mapsto & \lambda z \end{array}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. : $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- L'ensemble des vecteurs du plan usuel muni de l'addition de deux vecteurs du plan et de la multiplication d'un vecteur du plan par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.





- L'ensemble des vecteurs de l'espace usuel définit également un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.4

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

(i) Pour tout $u \in E$, on a : $\quad 0 \cdot u = 0_E, \quad$ et $\quad (-1)\cdot u = -u$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in E, \quad \lambda \cdot u = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$.

(iii) Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(u, v) \in E^2$, $(-\lambda)\cdot u = -(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot (-u) \quad$ et $\quad \lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$.

I.2 Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

I.2.1 L'espace $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On note $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ formés par des nombres de $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}^n = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in \mathbb{K}\right\}$. On le munit de la loi interne $+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ définie par, pour tout $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

et de la loi externe $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ définie par, pour tout $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

Alors, $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. Son vecteur nul est : $0_{\mathbb{K}^n} = \underbrace{(0, 0, \cdots, 0)}_{n \text{ termes}}$.

Notons que l'on peut identifier l'ensemble $\mathbb{K}^n$ à l'ensemble $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et 1 colonne (encore appelé l'ensemble des vecteurs colonnes à n composantes).

I.2.2 Les espaces de matrices $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

L'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition des matrices et de la multiplication externe d'une matrice par un scalaire est un $\mathbb{K}$-e.v. Le vecteur nul de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice nulle à n lignes et p colonnes.

I.2.3 L'espace des polynômes $\mathbb{K}[X]$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition usuelle des polynômes et de la multiplication externe d'un polynôme par un scalaire est un $\mathbb{K}$-e.v. Le vecteur nul de $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme nul.

I.2.4 Les espaces d'applications

- *Applications d'une variable.*
  Soient Ω un ensemble non vide et $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^\Omega$ l'ensemble des applications définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  On munit $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par, pour$(\lambda, f, g) \in \mathbb{K} \times \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K}) \times \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})$:

$$f + g : \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \lambda f : \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{array}$$

Alors $(\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. dont le vecteur nul $0_{\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})}$ est l'application nulle $\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & 0.\end{array}$

- *Applications entre espaces vectoriels.*
  Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $\mathscr{F}(E,F)$ l'ensemble des applications définies sur E et à valeurs dans F.
  On définit sur $\mathscr{F}(E,F)$ les lois $+$ et $\cdot$ par, pour $(\lambda,f,g)\in\mathbb{K}\times\mathscr{F}(E,F)\times\mathscr{F}(E,F)$:

$$f+g:\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (f+g)(x)=f(x)+g(x),\end{array} \qquad \text{et} \qquad \lambda f:\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (\lambda f)(x)=\lambda f(x).\end{array}$$

  Alors $(\mathscr{F}(E,F),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. dont le vecteur nul est l'application : $\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F.\end{array}$

Exemples 4.5.
- Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})=\mathbb{R}^I$ des fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs réelles, muni de l'addition usuelle des fonctions et du produit d'une fonction par un nombre réel, est un $\mathbb{R}$-e.v.
- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles muni de l'addition usuelle des suites et du produit d'une suite par un nombre réel est un $\mathbb{R}$-e.v.

I.3 Sous-espaces vectoriels

Dans tout ce paragraphe, $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 4.6. Soit F une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $0_E\in F$,

(ii) $\forall (u,v)\in F^2,\quad u+v\in F$,

(iii) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall u\in F,\quad \lambda\cdot u\in F$.

Proposition 4.7

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si : $F\neq\varnothing$ et $\Big(\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall(u,v)\in F^2,\ \lambda\cdot u+v\in F\Big)$.

Exemple 4.8. Les ensembles $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E. On les appelle les sous-espaces vectoriels triviaux de E.

Exemple 4.9. Démontrons que l'ensemble $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-2y+z=0\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(i) Il est clair que F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est non vide puisqu'il contient le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^3}$ de $\mathbb{R}^3$. En effet un vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ appartient à F si et seulement si ses composantes x et y et z vérifient la relation $x-2y+z=0$.

(ii) Il reste à démontrer que F est stable par combinaison linéaire : considérons deux éléments quelconques (x,y,z) et (x',y',z') de F et un nombre réel λ et démontrons que le vecteur $\lambda\cdot(x,y,z)+(x',y',z')$ est encore un élément de F. Remarquons que : $\lambda\cdot(x,y,z)+(x',y',z')=(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z')$. Par définition de F, le vecteur $(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z')$ appartient à F si et seulement si :

$$(\lambda x+x')-2(\lambda y+y')+(\lambda z+z')=0.$$

Or : $(\lambda x+x')-2(\lambda y+y')+(\lambda z+z')=\lambda(x-2y+z)+(x'-2y'+z')$. Puisque (x,y,z) et (x',y',z') appartiennent à F, $x-2y+z=0$ et $x'-2y'+z'=0$. On en déduit donc que $(\lambda x+x')-2(\lambda y+y')+(\lambda z+z')=0$; ce qui signifie que $\lambda\cdot(x,y,z)+(x',y',z')$ appartient à F.

21 Soient $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$ et $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{K}^n$. Démontrer que l'ensemble suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$: $\Big\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{K}^n,\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0\Big\}$.

Exemple 4.10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X],\ \deg P \leqslant n\}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, avec la convention $\deg 0 = -\infty$: exercice.

Exemple 4.11.
- Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$: exercice.
- De même $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I) et $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I) sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathscr{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exemple 4.12 (Contre-exemple)**.** L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 2\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, il ne contient pas le vecteur nul $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ puisque $0 - 2 \times 0 + 0 \neq 2$.

Proposition 4.13

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors l'ensemble F muni des deux lois $+$ et $\cdot$ induites par E est un $\mathbb{K}$-e.v.

Méthode (Méthode pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel). En général, pour démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,

1) on cherche un $\mathbb{K}$-e.v. $(E, +, \cdot)$ qui contient l'ensemble F,

2) on démontre que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 4.14. Démontrons que l'ensemble F des fonctions dérivables sur $[0, 1]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour cela, démontrons que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{F}([0, 1], \mathbb{R})$:

(i) Le vecteur nul de $\mathscr{F}([0, 1], \mathbb{R})$ est la fonction nulle $0_{\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$. La fonction nulle est dérivable sur $[0, 1]$ donc $0_{\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})} \in F$.

(ii) Soient $f \in F$ et $g \in F$. Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0, 1]$, donc $f + g$ est dérivable sur $[0, 1]$ (de dérivée $(f + g)' = f'g + fg'$). Ainsi, $f + g \in F$.

(iii) Soit de plus $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque f est dérivable sur $[0, 1]$, la fonction λf est dérivable sur $[0, 1]$ (de dérivée $(\lambda f)' = \lambda f'$). On a donc $\lambda f \in F$.

On en déduit que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([0, 1), \mathbb{R})$. Ainsi, F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

22 Démontrer que l'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-e.v.
Indication : remarquer que l'ensemble des fonctions paires est $\left\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\right\}$.

Proposition 4.15

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Exercice. □

II Familles libres, familles génératrices

Dans toute cette partie, on considère un $\mathbb{K}$-e.v. $(E, +, \cdot)$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 Combinaisons linéaires

Définition 4.16. Soient $u_1, u_2, \cdots, u_p$ des vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$ tout vecteur u de E de la forme

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ sont des scalaires quelconques de $\mathbb{K}$ qui sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 4.17. Considérons les fonctions f, g et h de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définies par :

$$f(x) = \cos(2x), \quad g(x) = \cos^2 x, \quad h(x) = 1.$$

La fonction f est combinaison linéaire des fonctions g et h : $f = 2g - h$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, i.e. $f(x) = 2g(x) - h(x)$.

Exemple 4.18. Démontrons que le polynôme $P(X) = 1 - X$ est combinaison linéaire des polynômes $Q(X) = X + 3$ et $R(X) = X + 1$, c'est-à-dire qu'il existe deux scalaires α et β tels que $P(X) = \alpha Q(X) + \beta R(X)$. Or,

$$P(X) = \alpha Q(X) + \beta R(X) \iff 1 - X = \alpha(X+3) + \beta(X+1) \iff 1 - X = (\alpha+\beta)X + (3\alpha+\beta).$$

Par identification des coefficients du polynôme, il s'agit de résoudre le système $\begin{cases} \alpha+\beta = -1 \\ 3\alpha+\beta = 1 \end{cases}$ d'inconnue (α,β). Or,

$$\left\{\begin{array}{rcrl} \alpha+\beta &=& -1 & L_1 \\ 3\alpha+\beta &=& 1 & L_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrl} \alpha+\beta &=& -1 & \\ -2\beta &=& 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrl} \alpha+\beta &=& -1 & \\ \beta &=& -2 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} \alpha &=& 1 \\ \beta &=& -2. \end{array}\right.$$

Ce système admet une unique solution $(\alpha,\beta) = (1,-2)$, donc P est bien combinaison linéaire de Q et R, car $P(X) = 1 \cdot Q(X) + (-2) \cdot R(X)$.

Exemple 4.19. Toute matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ s'écrit comme combinaison linéaire des quatre matrices ci-dessous :

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; \text{et} \; M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet : $A = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22}$.

23 On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$: $u = (1,-1)$, $\quad v = (3,4)$, $\quad$ et $\quad w = (1,0)$. Démontrer que w est combinaison linéaire des vecteurs u et v.

Proposition 4.20 (Définition d'un sous-espace vectoriel engendré)

Soient $u_1, u_2, \cdots, u_p$ des vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré** par les vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$ et on le note $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p)$.

Remarque 4.21. En fait,

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \Big\{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p,\ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\Big\}.$$

Exemple 4.22. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur $\vec{u} = (1,-2)$ est l'ensemble :

$$\mathrm{Vect}(\vec{u}) = \Big\{\lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(\lambda,-2\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = -2x\Big\},$$

qui n'est rien d'autre que la droite du plan d'équation $y = -2x$.

Exemple 4.23. Démontrons que l'ensemble $\big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x = 2y\big\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les trois vecteurs $(2,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$.

Posons $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x = 2y\}$. Soit $\vec{u} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

$$\begin{aligned}\vec{u} \in F &\iff x = 2y\\ &\iff \vec{u} = (2y,y,z,t) = (2y,y,0,0) + (0,0,z,0) + (0,0,0,t)\\ &\iff \vec{u} = y(2,1,0,0) + z(0,0,1,0) + t(0,0,0,1).\end{aligned}$$

Ainsi, $F = \left\{y(2,1,0,0) + z(0,0,1,0) + t(0,0,0,1),\ (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\Big((2,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\Big)$.

24 Démontrer que l'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x - 2y + z = 0\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par deux vecteurs que l'on précisera. *(On s'inspirera de l'exemple précédent en exprimant une des 3 composantes d'un vecteur (x,y,z) de F en fonction des 2 autres.)*

Proposition 4.24

Soient $u_1, u_2, \cdots, u_p$ des vecteurs de E. L'ensemble $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$.

Remarque 4.25. Autrement dit, si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$ alors $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p) \subset F$.

Exemple 4.26. Cette proposition permet, par exemple, de démontrer l'inclusion suivante entre sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{Vect}\big((1,0),(0,1)\big) \subset \mathrm{Vect}\big((2,1),(1,2)\big).$$

En effet, il est facile de vérifier que : $(1,0) = \frac{2}{3}(2,1) - \frac{1}{3}(1,2)$, $\quad (0,1) = -\frac{1}{3}(2,1) + \frac{2}{3}(1,2)$; ce qui implique que les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ appartiennent tous deux au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,((2,1),(1,2))$ engendré par les vecteurs $(2,1)$ et $(1,2)$. D'où le résultat d'après la remarque précédente.

II.2 Familles génératrices

Définition 4.27. Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une famille finie de p vecteurs de E. On dit que $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est une famille **génératrice** de E si $E = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$.

Proposition 4.28

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est une famille génératrice de E.

(ii) Tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$.

Exemple 4.29. D'après l'exemple 4.19, la famille des matrices $(M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22})$ définies par

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est une famille génératrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

25 Démontrer que la famille $(1, i)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-e.v. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

26 Démontrer que les vecteurs $\vec{u} = (1,1)$ et $\vec{v} = (3,2)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4.30

Toute famille qui contient une famille génératrice de E est encore une famille génératrice de E.

II.3 Famille libre

Définition 4.31. Soient $u_1, u_2, \cdots, u_p$ des vecteurs de E. On dit que la famille de vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est **libre** (ou encore que les vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$ sont **linéairement indépendants**) si :

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \Big(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0\Big).$$

Définition 4.32. Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite **liée**.

Proposition 4.33

Une famille $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ de vecteurs de E est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.

Exemples 4.34.
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan usuel. La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- La famille $(1, i)$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-e.v. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, mais c'est une famille liée dans le $\mathbb{C}$-e.v. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Exemple 4.35. Démontrons que les fonctions $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \cos x \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sin x,$$

forment une famille libre du $\mathbb{R}$-e.v. $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel quel $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, où $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ représente le vecteur nul de $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$, c'est-à-dire la fonction nulle. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0$, ce qui s'écrit encore,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0.$$

Cette dernière égalité étant vérifiée pour tout réel x, elle l'est en particulier pour :
- $x = 0$, ce qui donne $\lambda_1 \cos(0) + \lambda_2 \sin(0) = 0$, i.e. $\lambda_1 = 0$,
- $x = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $\lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, i.e. $\lambda_2 = 0$.

Ainsi, on a $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$; ce qui signifie que la famille (f_1, f_2) est libre.

27 La famille $(1, 1 + X^2, X^2)$ est-elle libre dans $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$?

Proposition 4.36

Toute sous-famille d'une famille libre est une famille libre.

II.4 Bases d'un espace vectoriel

Définition 4.37. On appelle **base** de $(E, +, \cdot)$ toute famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice de E.

Exemple 4.38. La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-e.v. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Exemple 4.39. Les quatre matrices ci-dessous forment une base du $\mathbb{K}$-e.v. $(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}), +, \cdot)$:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \text{et} \ M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

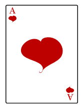
Nous avons déjà vu que la famille $(M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22})$ est génératrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. Démontrons qu'elle est libre : soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{K}^4$ tel que $\lambda_1 M_{11} + \lambda_2 M_{12} + \lambda_3 M_{21} + \lambda_4 M_{22} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}$. Puisque

$$\begin{aligned}
\lambda_1 M_{11} + \lambda_2 M_{12} + \lambda_3 M_{21} + \lambda_4 M_{22} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

on en déduit que $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = 0$. Ainsi, la famille $(M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22})$ est libre.

Exemple 4.40. La famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ définie par

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \cdots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \cdots, 0) \\ &\vdots \\ e_i &= (0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rang i}}}{1}, 0, \cdots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, \cdots, 0, 1) \end{aligned}$$



est une base de $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ appelée **base canonique** de $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$.

28 Démontrer que la famille $\left(1, X, X^2, \cdots, X^n\right)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$. On l'appelle la **base canonique** de $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$.

Proposition 4.41 (Coordonnées d'un vecteur dans une base finie)

Soit $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(ii) Tout vecteur u de E s'écrit de manière **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_p$:

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p, \quad \text{avec}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p.$$

(iii) L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \end{array}$ est bijective.

Définition 4.42. Soient $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une base de E et u un vecteur de E. Les p scalaires uniques λ_1, λ_2, ..., λ_p pour lesquels u s'écrit : $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$, sont appelés les **coordonnées** du vecteur u dans la base $\mathscr{B}$. On note $u_{\mathscr{B}}$ le vecteur colonne formé par les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathscr{B}$:

$$u_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

29 Donner les coordonnées du vecteur $P = 1 + 3X - 2X^3$ dans la base canonique de $(\mathbb{K}_3[X], +, \cdot)$, à savoir $(1, X, X^2, X^3)$.

III Somme de deux sous-espaces vectoriels

III.1 Sous-espace vectoriel engendré par la réunion de deux sous-espaces vectoriels

Définition 4.43. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme de F et G** le sous-ensemble de E noté $F + G$ défini par :

$$F + G = \{u_F + u_G, \ (u_F, u_G) \in F \times G\}.$$

Proposition 4.44

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors :

(i) $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) $F+G$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $F \cup G$.

Exemple 4.45. Si $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ et que $G = \text{Vect}(v_1, v_2, \cdots, v_q)$, alors

$$F+G = \text{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p, v_1, v_2, \cdots, v_q).$$

III.2 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 4.46. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F+G$ est **directe** lorsque $F \cap G = \{0_E\}$. On note alors $F \oplus G$ au lieu de $F+G$.

Remarque 4.47. Notons que $F \cap G$ étant un sous-espace vectoriel de E, on a toujours $0_E \in F \cap G$, et donc $\{0_E\} \subset F \cap G$. Pour démontrer que F et G sont en somme directe, il suffit donc seulement de démontrer l'inclusion $F \cap G \subset \{O_E\}$, ce qui revient à démontrer que le seul vecteur appartenant à l'intersection $F \cap G$ est le vecteur nul.

Exemple 4.48. Montrons que les sous-espaces vectoriels H et D de $\mathbb{R}^n$ définis ci-dessous sont en somme directe :

$$H = \Big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\Big\}, \quad D = \text{Vect}\big(\underbrace{(1,1,1,\cdots,1)}_{n}\big).$$

Soit $x \in H \cap D$. Il s'agit de démontrer que $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Puisque $x \in H$, on peut écrire x sous la forme :

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0. \tag{4.1}$$

D'autre part, $x \in D$, donc il existe un scalaire $d \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x = d(1,1,1,\cdots,1) = (d,d,d,\cdots,d). \tag{4.2}$$

En identifiant ces deux écritures de x, on obtient $x_i = d$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = nd$. D'après (4.1), on en déduit que $nd = 0$, et donc que $d = 0$. En remplaçant dans (4.2), on obtient $x = (0,0,0,\cdots,0) = 0_{\mathbb{R}^n}$; ce qui signifie (d'après la remarque 4.47) que $H \cap D = \big\{0_{\mathbb{R}^n}\big\}$, c'est-à-dire que H et D sont en somme directe.

30 Prouver que les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}\big((1,0)\big)$ et $G = \text{Vect}\big((0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ sont en somme directe.

Proposition 4.49

La somme $F+G$ est directe si et seulement si tout élément u de $F+G$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.

III.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 4.50. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **supplémentaires** dans E si $E = F \oplus G$.

Corollaire 4.51

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $E = F \oplus G$.

(ii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

(iii) $\forall u \in E,\ \exists!(u_F, u_G) \in F \times G, \quad u = u_F + u_G$.

Remarque 4.52. Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemple 4.53. Montrons que les sous-espaces vectoriels H et D de l'exemple 4.48 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$. Utilisons, par exemple, la caractérisation (iii) du corollaire 4.51. Soit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. Montrons qu'il existe un unique couple de vecteurs $(x_H, x_D) \in H \times D$ tel que $x = x_H + x_D$ en raisonnant par analyse/synthèse.

- Analyse : supposons qu'un tel couple (x_H, x_D) existe. Montrons qu'il est nécessairement unique. Notons $x_H = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $\sum_{i=1}^n h_i = 0$ et $x_D = d(1,1,1,\cdots,1) = (d,d,d,\cdots,d)$ avec $d \in \mathbb{R}$. Le vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ s'écrit alors : $x = x_H + x_D = (h_1, h_2, \cdots, h_n) + (d, d, \cdots, d) = (h_1 + d, h_2 + d, \cdots, h_n + d)$. On en déduit donc que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = h_i + d. \tag{4.3}$$
D'où : $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (h_i + d) = \sum_{i=1}^n h_i + nd = 0 + nd = nd$; ce qui donne $d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Le vecteur x_D est donc entièrement déterminé à partir des composantes du vecteur x par $x_D = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)(1,1,1,\cdots,1)$. En remplaçant dans (4.3), on en déduit les composantes du vecteur x_H qui sont : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ h_i = x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Le vecteur x_H est donc déterminé de manière unique en fonction des composantes du vecteur x. On a ainsi démontré, sous réserve d'existence, l'unicité du couple $(x_H, x_D) \in H \times D$ tel que $x = x_H + x_D$.
- Synthèse : démontrons l'existence d'un tel couple (x_H, x_D). Posons $d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ et considérons le vecteur x_D défini par $x_D = d(1,1,1,\cdots,1)$. Par construction, $x_D \in D$. Posons alors $x_H = x - x_D$ de sorte que : $x_H = (x_1, x_2, \cdots, x_n) - (d, d, \cdots, d) = (x_1 - d, x_2 - d, \cdots, x_n - d)$, avec
$$\sum_{i=1}^n (x_i - d) = \sum_{i=1}^n x_i - nd = \sum_{i=1}^n - n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) = 0.$$
Ainsi, $x_H \in H$. De plus, par définition de x_H, $x = x_H + x_D$. On a donc construit un couple $(x_H, x_D) \in H \times D$ pour lequel $x = x_H + x_D$.

On a finalement démontré par analyse/synthèse la propriété : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists!(x_H, x_D) \in H \times D,\ x = x_H + x_D$. Autrement dit : $\mathbb{R}^n = H \oplus D$.

31 Prouver que les sous-espaces vectoriels F et G de l'ex. 30 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

IV Espaces vectoriels de dimension finie

IV.1 Existence de bases

Définition 4.54. Un espace vectoriel E est dit **de dimension finie** s'il admet au moins une famille génératrice finie.

Exemple 4.55. L'espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est de dimension finie puisque la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice finie.

Théorème 4.56 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Corollaire 4.57. Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ admet au moins une base.

IV.2 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 4.58

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $n \in \mathbb{N}^*$. Si E admet une base formée de n vecteurs, alors toute base de E est formée d'exactement n vecteurs.

Définition 4.59. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. On appelle **dimension** de E le nombre de vecteurs constituant une base de E. On note cette quantité $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ (ou simplement $\dim(E)$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur l'ensemble $\mathbb{K}$ des scalaires). Par convention, on pose $\dim_{\mathbb{K}}(\{0_E\}) = 0$.

Exemples 4.60.
- $\mathbb{R}^n$ est de dimension n sur $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{C}^n$ est de dimension n sur $\mathbb{C}$,
- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$,
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, et plus généralement, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$,
- Si $u \neq 0_E$, alors $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Vect}(u)) = 1$.

IV.3 Caractérisation des bases

Proposition 4.61 (Cardinal d'une famille libre/génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n avec $n \geqslant 1$.

(i) Toute famille libre de E est composée d'au plus n vecteurs.

(ii) Toute famille génératrice de E est composée d'au moins n vecteurs.

Théorème 4.62 (Caractérisation des bases avec la dimension)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n avec $n \geqslant 1$. Soit $\mathscr{B}$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(ii) $\mathscr{B}$ est une famille libre de n vecteurs de E.

(iii) $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de n vecteurs de E.

Méthode (pour démontrer qu'une famille de vecteurs est une base). Soit E un espace vectoriel de dimension n avec $n \geqslant 1$. Pour démontrer qu'une famille $\mathscr{B} = (u_1, \cdots, u_p)$ de p vecteurs de E est une base de E, il suffit de remarquer que $p = n$ **et** prouver que $\mathscr{B}$ est libre (**ou** $\mathscr{B}$ est génératrice).

32 Démontrer que la famille $\big((1,2),(3,4)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

IV.4 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème 4.63

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors :

(i) F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$,

(ii) si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

33 Soient $P(X) = X - 1$ et $Q(X) = X + 1$. Démontrer que $\mathrm{Vect}\big(P,Q\big)$ est de dimension 2 et en déduire que $\mathrm{Vect}\big(P,Q\big) = \mathbb{R}_1[X]$.

Définitions 4.64. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
- Si $\dim(F) = 1$, alors on dit que F est une **droite vectorielle** de E.
- Si $\dim(F) = 2$, alors on dit que F est un **plan vectoriel**.
- Si $\dim(F) = \dim(E) - 1$, alors on dit que F est un **hyperplan** de E.

Proposition 4.65 (Existence de s-e.v. supplémentaires en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :

(i) F admet au moins un supplémentaire G dans E (i.e. il existe au moins un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$),

(ii) dans ce cas, $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Théorème 4.66 (Formule de Grassmann)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

34 Soient $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\right\}$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y=z\right\}$.

1) Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^3$.

3) Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.

4) Déduire des questions précédentes la dimension de $F + G$.

35 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E. Soit $a \in E \setminus H$.

1) Rappeler la dimension de H.

2) Démontrer que $\dim(\mathrm{Vect}(a)) = 1$. (*Indication : on démontrera pour cela que* $a \neq 0_E$.)

3) Démontrer que $H \cap \mathrm{Vect}(a) = \{0_E\}$.

4) Déduire des questions précédentes que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

IV.5 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 4.67. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle **rang** d'une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs de E l'entier $\mathrm{rang}(\mathscr{F}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Vect}(\mathscr{F}))$. Autrement dit,

$$\mathrm{rang}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p)).$$

Exemple 4.68. Soient u_1 et u_2 deux vecteurs d'un espace vectoriel E.

$$\mathrm{rang}(u_1, u_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_1 = u_2 = 0, \\ 1 & \text{si } u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont colinéaires,} \\ 2 & \text{si la famille } (u_1, u_2) \text{ est libre.} \end{cases}$$

Proposition 4.69

$\mathrm{rang}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = p \iff (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est libre.

Théorème 4.70

Le sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est inchangé si on effectue les opérations élémentaires suivantes sur cette famille vecteurs :

(i) retrait du vecteur nul s'il est présent,

(ii) permutation de deux vecteurs u_i et u_j $(u_i \leftrightarrow u_j)$,

(iii) multiplication d'un vecteur u_i par un scalaire non nul a $(u_i \leftarrow a u_i)$,

(iv) addition à un vecteur u_i d'un multiple $a u_j$ d'un autre vecteur u_j $(u_i \leftarrow u_i + a u_j)$.

Méthode (pour calculer le rang d'une famille de vecteurs). Ainsi, pour calculer le rang d'une famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ de E, on procède comme suit :

1) On considère la matrice A dont les colonnes représentent les coordonnées des vecteurs u_1, u_2, $\cdots$ et u_p dans une base $\mathscr{B}$ de E.
2) On effectue une méthode du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice A.
3) À la fin du processus, les colonnes non nulles de la matrice échelonnée obtenue sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs d'une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Le rang de la famille $\mathscr{F}$ est alors le nombre de colonnes non nulles de cette matrice échelonnée.

Exemple 4.71. Considérons les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: $u = (1,2,3)$, $v = (-1,1,1)$, $w = (0,1,2)$ et $x = (1,0,3)$. Déterminons le rang de la famille (u, v, w, x).
Notons A la matrice dont les colonnes représentent les coordonnées des vecteurs u, v, w et x dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et échelonnons les colonnes de cette matrice :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - \frac{1}{3} C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + \frac{2}{3} C_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad C_4 \leftarrow C_4 - 2C_3.$$

La matrice obtenue étant échelonnée, les vecteurs $(1,2,3)$, $(0,3,4)$ et $(0,0,\frac{2}{3})$ forment une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u,v,w,x)$. Ainsi, $\mathrm{rang}(u,v,w,x) = 3$.

36 Déterminer le rang des deux familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

1) (u, v) où $u = (1,2,-1,1)$ et $v = (2,3,0,-1)$.
2) (u, v, w) où $u = (-2,1,1,1)$, $v = (0,3,1,-1)$ et $w = (-6,9,5,1)$.

Indication : pour le point 1) on se reportera à l'exemple 4.68.

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capable de :

- rappeler les développements limités usuels en 0 (de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^\alpha$),
- rappeler la formule de Taylor-Young,
- additionner des développements limités,
- multiplier des développements limités,
- composer des développements limités,
- intégrer un développement limité,
- déterminer un développement limité en un point $a \neq 0$,
- calculer des limites en utilisant les développements limités,
- démontrer l'existence d'une tangente en un point et étudier sa position,
- démontrer l'existence d'une asymptote en $\pm\infty$ et étudier sa position.

I Notion de développement limité

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ qui n'est pas réduit à un point. Sauf indication contraire, $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur l'intervalle I et a désigne un nombre réel qui est soit un point de I, soit une des extrémités de I.

I.1 Définition

Définitions 5.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n en a (noté en abrégé un $DL_n(a)$) s'il existe un polynôme $P_n = a_0 + a_1 X + \cdots a_n X^n$ de degré au plus n et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que pour tout réel x dans un voisinage de a on ait :

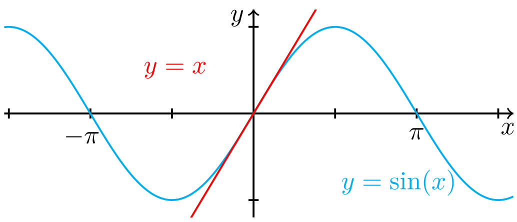
$$f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0,$$

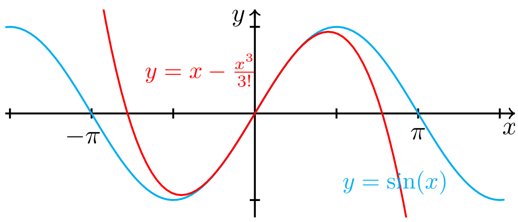
i.e.,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

- La fonction polynomiale $x \mapsto P_n(x-a)$ est appelée **partie régulière** (ou encore **partie principale** ou **partie polynomiale**) du $DL_n(a)$ de f.
- La quantité $(x-a)^n \varepsilon(x)$ est appelée **reste** d'ordre n du développement limité de f en a.

Remarque 5.2. Lorsque cela est possible, déterminer le développement limité d'une fonction en un point permet de faciliter son étude **au voisinage** de ce point. En effet, cette méthode peut permettre d'approcher une fonction éventuellement compliquée par une fonction polynomiale beaucoup plus facile à étudier. Cet aspect est développé à la section III.2. Ci-dessous le graphe de la fonction sinus accompagné de son développement limité à l'ordre 1 à gauche et à l'ordre 3 à droite :





37 Démontrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 donné par : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Indication : considérer la fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ définie par $\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Remarques 5.3.

- Avec les notations usuelles de comparaison locale des fonctions, on écrit souvent le reste sous la forme $o\big((x-a)^n\big)$ au lieu de $(x-a)^n \varepsilon(x)$. Ainsi, la définition 5.1 peut se réécrire de la façon suivante : f admet un $DL_n(a)$ si et seulement s'il existe $n+1$ nombres réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tels que pour tout x dans un voisinage de a on ait :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

- En remplaçant x par $a+h$ dans la définition 5.1 on obtient la caractérisation suivante : f admet un $DL_n(a)$ si et seulement s'il existe $n+1$ nombres réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ et une fonction ε définie sur $J = \{h \in \mathbb{R}/\ a+h \in I\}$ tels que pour tout h au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h), \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0,$$

i.e. si et seulement si la fonction g définie sur J par $g(h) = f(a+h)$ admet un $DL_n(0)$.

Proposition 5.4

Si f admet un $DL_n(a)$, alors f admet un $DL_k(a)$ pour tout entier naturel $k \leqslant n$.

38 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction f définie sur $]-1;1[$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ est donné par :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x), \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\to} 0.}$$

Indication : on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

I.2 Unicité d'un développement limité

Proposition 5.5

Si f admet un $DL_n(a)$, alors sa partie régulière est unique.

Corollaire 5.6. On suppose que f admet un $DL_n(0)$. Si f est paire (resp. impaire), alors la partie régulière du $DL_n(0)$ de f est paire (reps. impaire), i.e. la partie régulière du $DL_n(0)$ de f ne comporte que des monômes de degré pair (resp. impair).

Proposition 5.7

Si f admet un $DL_n(a)$ donné par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$ et que $p \in \mathbb{N}$ désigne le plus petit entier $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$ alors :

$$f(x) \ \sim_a \ a_p (x-a)^p.$$

Proposition 5.8

f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f admet une limite finie au point a.

Corollaire 5.9

Lorsque $a \in I$,

(i) f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a,

(ii) f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a.

I.3 Condition suffisante d'existence d'un développement limité

Théorème 5.10 (Formule de Taylor-Young)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors au voisinage de tout point $a \in I$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \text{avec} \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Ainsi, toute fonction qui est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage d'un point a admet un $DL_n(a)$ qui est donné par la formule de Taylor-Young. Cette formule permet, en particulier, d'obtenir les développements limités de certaines fonctions usuelles pour lesquelles on peut calculer facilement les dérivées successives.

39 Déterminer le $DL_4(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \sin^2 x$. En déduire le $DL_3(0)$ de f.

I.4 Développements limités usuels obtenus par la formule de Taylor-Young

Proposition 5.11

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, lorsque x est au voisinage de 0 :

- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x)$

où ε désigne une fonction (nouvelle d'une ligne à l'autre) qui vérifie $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\to} 0$.

40 Donner le $DL_3(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

II Opérations sur les développements limités

II.1 Développement limité d'une somme et d'un produit

Proposition 5.12

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I contenant 0. Si f et g admettent des $DL_n(0)$ donnés par

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x),$$

où P_n et Q_n sont de degré au plus n et $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$, alors :

(i) pour tous réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ admet un $DL_n(0)$ donné par

$$(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha P_n + \beta Q_n)(x) + x^n \varepsilon_3(x), \quad \text{avec} \lim_{x \to 0} \varepsilon_3(x) = 0,$$

(ii) la fonction fg admet un $DL_n(0)$ donné par

$$(fg)(x) = R_n(x) + x^n \varepsilon_4(x), \quad \text{avec} \lim_{x \to 0} \varepsilon_4(x) = 0,$$

où R_n est le polynôme obtenu en tronquant à l'ordre n le polynôme $P_n Q_n$.

41 En utilisant les développements limités de la proposition 5.11, déterminer les développements limités suivants :

1) $DL_n(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la fonction $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

2) $DL_n(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la fonction $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

3) $DL_4(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$.

4) $DL_3(0)$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1 + \sin(x) - e^x}{x}$.

II.2 Intégration terme à terme d'un développement limité

Proposition 5.13

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Si f' admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$f'(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0,$$

alors f admet un $DL_{n+1}(a)$ donné par :

$$f(x) = f(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1}\widetilde{\varepsilon}(x),$$

avec $\lim_{x\to a}\widetilde{\varepsilon}(x) = 0$.

Exemple 5.14. La fonction $f :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$ admet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un $DL_n(0)$ donné par :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x), \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Cette formule n'est pas à connaître par cœur mais vous devez savoir la retrouver !

Attention. On ne peut pas (en général) dériver un développement limité.

II.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 5.15

Soient f et g deux fonctions admettant des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P_n et Q_n. Si $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant à l'ordre n le polynôme $P_n(Q_n(X))$.

Exemple 5.16. Déterminons le développement limité de $x \mapsto e^{\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0. Soit x au voisinage de 0, alors : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$. Ainsi, en posant $u = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, on obtient $e^{\sin(x)} = e^u$ et donc :

$$e^{\sin(x)} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o(u^3), \quad \text{car } u \text{ est au voisinage de } 0.$$

On calcule les puissances de u les unes après les autres en supprimant au fur et à mesure les termes en x^k pour $k > 3$ (comme lorsqu'on effectue un produit des développements limités) :

- $u = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $u^2 = \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + o(x^3)$
- $u^3 = u \times u^2 = \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \times \left(x^2 + o(x^3)\right) = x^3 + o(x^3)$.

On déduit de la dernière égalité : $o(u^3) = o(x^3)$. On obtient ainsi :

$$\mathrm{e}^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2!}\left(x^2 + o(x^3)\right) + \frac{1}{3!}\left(x^3 + o(x^3)\right);$$

d'où, après simplification :

$$\mathrm{e}^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

42 Déterminer le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ et en déduire que le $DL_5(0)$ de la fonction tan est

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x), \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

II.4 Développement limité au voisinage de $a \neq 0$

Méthode. Pour déterminer le développement limité d'une fonction f au voisinage d'un point $a \neq 0$, on effectue le changement de variable suivant :

$$x = a + h,$$

où h est au voisinage de 0 et où x est au voisinage de a. On exprime alors $f(x)$ en fonction de a et de h et on utilise les développements limités usuels au voisinage de 0 en la variable h. Pour terminer, on remplace h par $x - a$. Attention, on ne développe surtout pas les monômes $(x-a)^k$ obtenus.

Exemple 5.17. Déterminons le développement limité à l'ordre 2 de $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^x$ au voisinage de $a = 1$. On pose $x = 1 + h$. Alors : $f(x) = f(1+h) = \mathrm{e}^{1+h} = \mathrm{e}^1\mathrm{e}^h$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^1\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + h^2\varepsilon(h)\right), && \text{où } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0\\
&= \mathrm{e}^1\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + (x-1)^2\varepsilon(x-1)\right), && \text{où } \varepsilon(x-1) \underset{x\to 1}{\to} 0\\
&= \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^1(x-1) + \frac{\mathrm{e}^1}{2!}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_1(x), && \text{où } \varepsilon_1(x) = \mathrm{e}^1\varepsilon(x-1) \underset{x\to 1}{\to} 0.
\end{aligned}$$

III Application des développements limités

III.1 Calcul de limites

La proposition 5.7 s'avère intéressante pour déterminer la limite éventuelle d'une fonction au voisinage d'un point. Les développements limités sont donc particulièrement utiles pour calculer les limites dans le cas de formes indéterminées.

Exemple 5.18. Utilisons les développements limités pour lever l'indétermination dans la limite éventuelle :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \mathrm{e}^x + \sin x}{1 - \cos x}.$$

On rappelle que :

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x),$$

où ε_1 tend vers 0 en 0. Cherchons alors le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction au numérateur $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^x + \sin x$. On rappelle que : $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)$ et $\sin x = x + x^2\varepsilon_3(x)$, où ε_2 et ε_3 ont pour limite 0 en 0. Ainsi, la fonction au numérateur admet pour $DL_2(0)$:

$$1 - \mathrm{e}^x + \sin x = 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + x + x^2\varepsilon_4(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x), \quad \varepsilon_4(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Donc :

$$\frac{1 - \mathrm{e}^x + \sin x}{1 - \cos x} = \frac{-\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x)}{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)} = \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_4(x)}{\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1.$$

43 Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\tan x}{\sin^2 x}$.

Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 42 pour obtenir le $DL_2(0)$ du numérateur.

III.2 Étude locale d'une fonction au voisinage d'un point

Les développements limités permettent également de déterminer l'équation de la tangente à une fonction f en un point a, ainsi que la position de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f par rapport à cette tangente au voisinage du point a.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un $DL_n(a)$ donné par

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x), \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\to} 0,$$

avec $n \geqslant 1$.

- L'équation de la tangente (T) à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point a est :

$$(T): \quad y = a_0 + a_1(x-a).$$

- Supposons que $n \geqslant 2$ et qu'il existe $k \in \{2, \cdots, n\}$ tel que $a_k \neq 0$. On note alors p le plus petit entier k vérifiant cette propriété (i.e. $a_2 = \cdots = a_{p-1} = 0$ et $a_p \neq 0$). On a donc

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + (x-a)^p\widetilde{\varepsilon}(x), \qquad \text{avec } \widetilde{\varepsilon}(x) \underset{x\to a}{\to} 0.$$

  Au voisinage du point a on a donc :

$$f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \sim a_p(x-a)^p.$$

  La position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente (T) au voisinage du point a est alors déterminée par le signe de $a_p(x-a)^p$.

Exemple 5.19. Déterminons l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{\sin(x) - \ln(1-x)}{x}$$

au voisinage de 0 ainsi que la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (T). Commençons par déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f :

$$f(x) = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + x^3\varepsilon(x)}{x} = \frac{2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}{x} = 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

où la fonction ε a pour limite 0 en 0. On en déduit que l'équation de (T) est : $y = 2 + \frac{1}{2}x$. De plus,

$$f(x) - \left(2 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{6}x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

donc $f(x) - \left(2 + \frac{1}{2}x\right)$ est positif au voisinage de 0 car $\frac{1}{6}x^2 \geqslant 0$. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ se situe au-dessus de (T) au voisinage de 0.

44 Déterminer le $DL_2(0)$ de $f : x \mapsto (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$. En déduire une équation de la tangente (T) à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point A d'abscisse 0 et la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (T) au voisinage du point A.

III.3 Recherche d'asymptotes obliques au voisinage de l'infini

Méthode. Pour démontrer l'existence d'une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f au voisinage de $\pm\infty$, on effectue le changement de variable suivant :

$$x = \frac{1}{h},$$

où h est au voisinage de 0 (0^+ dans le cas d'une asymptote en $+\infty$ et 0^- dans le cas d'une asymptote en $-\infty$). On exprime alors $f(x)/x$ en fonction de h et on utilise les développements limités usuels au voisinage de 0 en la variable h. Pour terminer, on remplace h par $1/x$.

On pose donc $h = \frac{1}{x}$ pour x au voisinage de $\pm\infty$. On a alors :

$$\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right),$$

pour h au voisinage de 0. On suppose que la fonction $h \mapsto hf\left(\frac{1}{h}\right)$ admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$hf\left(\frac{1}{h}\right) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h), \qquad \text{où } \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\to} 0,$$

i.e.

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{où } \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to \pm\infty}{\to} 0.$$

On peut alors écrire, en multipliant par x,

$$f(x) = a_0 x + a_1 + \underbrace{\frac{a_2}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-1}}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)}_{=\tilde{\varepsilon}(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0}. \tag{5.1}$$

- On en déduit donc que la droite (D) d'équation $y = a_0 x + a_1$ est asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$).
- Supposons que $n \geqslant 2$ et qu'il existe $k \in \{2, \cdots, n\}$ tel que $a_k \neq 0$. On note alors p le plus petit entier k vérifiant cette propriété (i.e. $a_2 = \cdots = a_{p-1} = 0$ et $a_p \neq 0$). On a donc au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) :

  $$f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_p}{x^{p-1}} + \frac{1}{x^{p-1}}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{avec } \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0.$$

  Ainsi, au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) on remarque que :

  $$f(x) - (a_0 x + a_1) \sim \frac{a_p}{x^{p-1}}.$$

  La position de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f par rapport à l'asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) est alors déterminée par le signe de $\dfrac{a_p}{x^{p-1}}$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple 5.20. Recherchons l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ pour la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Posons, pour commencer, $h = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ au voisinage de $+\infty$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2}} \\
&= \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\
&= \sqrt{1 + h + h^2} \\
&= \sqrt{1+u}, \quad \text{où } u = h + h^2 \\
&= (1+u)^\alpha, \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{2} \\
&= 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + u^2\varepsilon(u), \qquad \text{avec } \varepsilon(u) \underset{u\to 0}{\to} 0 \\
&= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2\varepsilon(u).
\end{aligned}$$

Or $u = h + h^2$, donc $u^2 = (h+h^2)^2 = h^2 + h^2\varepsilon_1(h)$, avec $\varepsilon_1(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$. En remplaçant dans l'égalité précédente, on en déduit que :

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2}(h+h^2) - \frac{1}{8}h^2 + h^2\varepsilon_2(h) = 1 + \frac{1}{2}h + \frac{3}{8}h^2 + h^2\varepsilon_2(h), \qquad \text{avec } \varepsilon_2(h) \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

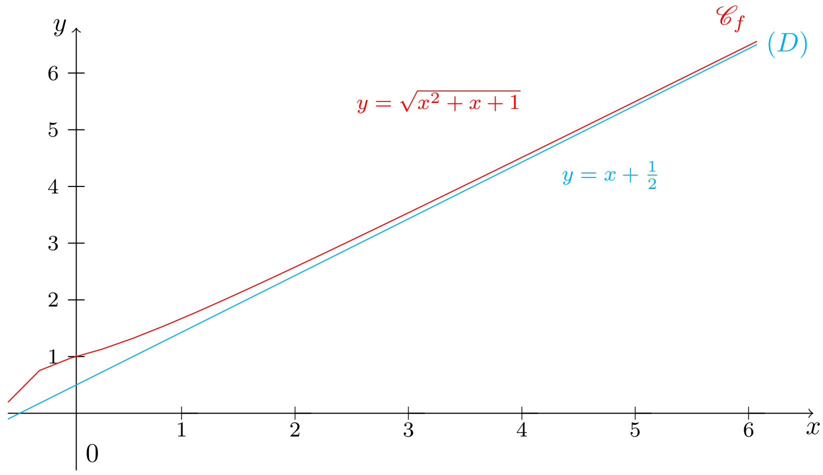
Finalement, en utilisant l'égalité $h = \frac{1}{x}$, on obtient :

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$

Ainsi, au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right). \tag{5.2}$$

On en déduit immédiatement que la droite (D) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au voisinage de $+\infty$ et qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de (D), puisque $\frac{3}{8x} > 0$.



Remarque 5.21. Le type d'égalité obtenue en (5.1) (resp. en (5.2)) est appelé **développement asymptotique** de f en $\pm\infty$ (resp. $+\infty$).

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capable de :

- démontrer qu'une application est ou n'est pas linéaire,
- déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire,
- calculer le rang d'une application linéaire,
- démontrer qu'une application linéaire est ou n'est pas injective/surjective/bijective,
- appliquer le théorème du rang pour calculer la dimension du noyau ou de l'image d'une application linéaire,
- déterminer une application linéaire à partir des images des vecteurs d'une base.

I Généralités sur les applications linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On rappelle que $\mathscr{F}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications de E dans F.

I.1 Définitions et premières propriétés

Définition 6.1. On dit qu'une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** de E dans F si :

(i) $\forall (u,v) \in E^2, \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$,

(ii) $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{K} \times E, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Proposition 6.2

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors :

(i) $f(0_E) = 0_F$,

(ii) $\forall u \in E, \quad f(-u) = -f(u)$,

(iii) $\forall (u_1, \dots, u_p) \in E^p, \ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(u_i)$.

Proposition 6.3

Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (\lambda, u, v) \in \mathbb{K} \times E \times E, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

Exemple 6.4. Soit $a \in \mathbb{K}$ fixé. L'application ci-dessous est linéaire :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ u & \mapsto & au. \end{array}$$

En effet, soit $(\lambda, u, v) \in \mathbb{K} \times E \times E$, alors :

$$f(\lambda u + v) = a(\lambda u + v) = \lambda(au) + av = \lambda f(u) + f(v).$$

45 Démontrer que les deux applications ci-dessous sont linéaires :

$$\mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ u & \mapsto & u \end{array} \qquad \mathbb{O}_{E,F} : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ u & \mapsto & 0_F. \end{array}$$

Définitions 6.5. L'application Id_E de l'exercice précédent est appelée **application identité** (de E), et l'application $\mathbb{O}_{E,F}$ est appelée **application nulle** (de E dans F).

46 Démontrer que l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ est linéaire.

I.2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 6.6

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et que $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

Théorème 6.7

L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque 6.8. Ce résultat signifie que la somme de deux applications linéaires est une application linéaire et que le produit d'une application linéaire par un scalaire est encore une application linéaire.

I.3 Rappels sur les applications injectives, surjectives et bijectives

On n'hésitera pas à relire le chapitre 3 « Ensembles et applications » du cours de MTA1 dans lequel figurent ces définitions ainsi que de nombreux exemples.

Définition 6.9. Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$. On dit que f est **injective** si :

$$\forall (u,u') \in E^2, \quad \big(u \neq u' \implies f(u) \neq f(u')\big).$$

Autrement dit, f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Définition 6.10. Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$. On dit que f est **surjective** si :

$$\forall v \in F,\ \exists u \in E, \quad f(u) = v.$$

Autrement dit, tous les éléments de F admettent au moins un antécédent par f.

Définition 6.11. Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$. On dit que f est **bijective** si :

$$\forall v \in F,\ \exists! u \in E, \quad f(u) = v.$$

Autrement dit, tous les éléments de F admettent exactement un antécédent par f.

Remarque 6.12. Une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Proposition 6.13

La composée de deux applications injectives (respectivement surjectives, bijectives) est injective (respectivement surjective, bijective).

II Image et noyau d'une application linéaire

II.1 Image d'une application linéaire

Définition 6.14. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **image** de f et on note $\operatorname{Im}(f)$ l'ensemble $f(E)$:

$$\operatorname{Im}(f) = \big\{f(u),\ u \in E\big\} = f(E).$$

Remarque 6.15. Dans les conditions de la définition précédente, $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-ensemble de F et pour tout $v \in F$, on a :

$$v \in \operatorname{Im}(f) \iff \big(\exists u \in E, \quad v = f(u)\big).$$

Exemple 6.16. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On rappelle que l'application identité sur E est définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_E & : & E & \to & E \\ & & u & \mapsto & u. \end{array}$$

Ainsi : $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E) = \{\mathrm{Id}_E(u),\, u \in E\} = \{u,\, u \in E\}$. Donc $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E) = E$.

47 Déterminer $\mathrm{Im}\,(\mathbb{O}_{E,F})$ où $\mathbb{O}_{E,F}$ est l'application nulle définie dans l'exercice 45.

Remarque 6.17. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors, f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Proposition 6.18

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

II.2 Image réciproque d'un ensemble par une application

Définition 6.19. Soient E et F deux ensembles quelconques et f une application de E vers F. Pour toute partie D de F, on appelle **image réciproque** de D par f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(D)$:

$$f^{-1}(D) = \{u \in E,\, f(u) \in D\}.$$

Autrement dit :

$$u \in f^{-1}(D) \iff f(u) \in D.$$

Remarque 6.20. On a toujours $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. De plus, pour tout élément v de F : $f^{-1}(\{v\}) = \{u \in E,\, f(u) = v\}$.

Proposition 6.21

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si D est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(D)$ est un sous-espace vectoriel de E.

II.3 Noyau d'une application linéaire

Définition 6.22. Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle **noyau** de f l'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E,\, f(u) = 0_F\}.$$

Remarque 6.23. Avec les notations de la définition :

$$\forall u \in E, \quad \big(u \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(u) = 0_F\big).$$

Proposition 6.24

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

(i) $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Remarque 6.25. Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective ssi $f^{-1}(\{0_F\}) = \{0_E\}$.

Attention. Cette caractérisation de l'injectivité n'est valable que pour les applications linéaires. Contre-exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Exemple 6.26. Déterminons le noyau de l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y,z) \end{array}$.

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\iff (x-y,z) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases} \\ &\iff (x,y,z) = (y,y,0) = y(1,1,0). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \big\{y(1,1,0),\ y \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\big((1,1,0)\big)$.

Exemple 6.27. Déterminons le noyau de l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f\big(P\big) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\iff P' = 0 \\ &\iff a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1} = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ ka_k = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ a_k = 0 \\ &\iff P = a_0. \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$. $\mathrm{Ker}(f)$ est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé par l'ensemble des polynômes constants.

48 Démonter que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x+z). \end{array}$ est linéaire puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

III Isomorphismes

Proposition 6.28

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si f est bijective, alors sa bijection réciproque f^{-1} est linéaire de F dans E.

Définitions 6.29. Une application linéaire bijective de E dans F est appelé un **isomorphisme** de E sur F. Lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur F, on dit que E et F sont **isomorphes**.

Définition 6.30. Un isomorphisme de E sur E est appelé un **automorphisme** de E. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Théorème 6.31

Soient $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (f_1,\ldots,f_n)$ une famille de vecteurs de F. Alors, il existe une unique application $g \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad g(e_i) = f_i;$$

Corollaire 6.32

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :
(i) $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$;
(ii) f est un isomorphisme ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

Remarque 6.33. Pour connaître entièrement une application linéaire $f \colon E \to F$, il suffit de connaître les images par f des vecteurs d'une base de E.

Exemple 6.34. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3) et soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :
$$f(e_1) = (1, 0), \quad f(e_2) = (2, -1) \quad \text{et} \quad f(e_3) = (-3, 1).$$
Alors, quel que soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :
$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$
donc :
$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(1, 0) + y(2, -1) + z(3, -1) \\ &= (x + 2y - 3z, -y + z). \end{aligned}$$

49 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :
$$f(1) = X, \quad f(X) = X - X^2, \quad f(X^2) = X^2 + 1.$$
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Démontrer que si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ avec a_0, a_1 et a_2 des réels alors, $f(P) = a_2 + (a_0 + a_1)X$.

Proposition 6.35

Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Corollaire 6.36

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors, E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Corollaire 6.37

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Si E est isomorphe à un $\mathbb{K}$-ev F de dimension finie, alors E est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.

IV Applications linéaires en dimension finie

IV.1 Rang d'une application linéaire

Lemme 6.38. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On sait que
$(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ admettant une famille génératrice finie, c'est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. $\square$

Définition 6.39. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-ev. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors on appelle **rang de** f et on note $\mathrm{rg}(f)$ la quantité :
$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Méthode (Calcul du rang d'une application linéaire). Pour déterminer le rang d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$, on choisit une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E puis on applique le résultat suivant :
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right).$$
Enfin, on pourra utiliser le point méthode page 42 pour calculer le rang de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

50 On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1), P(0)). \end{array}$
Une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ est $(f(1), f(X), f(X^2))$ car $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Or :
$$f(1) = (1,0,1), \quad f(X) = (1,1,0) \quad \text{et} \quad f(X^2) = (1,2,0).$$
Démontrer que la famille $(f(1), f(X), f(X^2))$ est libre et en déduire $\mathrm{rg}(f)$.

IV.2 Théorème du rang

Théorème 6.40 (du rang)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-ev quelconque et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :
$$\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

IV.3 Application à la caractérisation des isomorphismes

Théorème 6.41

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de **même dimension** finie $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective,

(ii) f est surjective,

(iii) f est injective,

(iv) $\mathrm{rg}(f) = n$,

(v) $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Objectifs d'apprentissage visés par ce chapitre

À la fin de ce chapitre (cours et TD), vous serez capable de :

- déterminer la matrice d'une application linéaire relativement à deux bases,
- déterminer une application linéaire à partir de sa matrice relativement à deux bases,
- utiliser le rang pour caractériser l'inversibilité d'une matrice,
- démontrer qu'une application linéaire est bijective en utilisant sa matrice relativement à deux bases et déterminer sa bijection réciproque,
- déterminer la matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$,
- appliquer la formule du changement de base pour déterminer la matrice d'une application linéaire dans de nouvelles bases.

I Coordonnées d'un vecteur dans une base

Définition 7.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Tout vecteur u de E s'écrit de manière unique sous la forme : $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Les λ_i de cette décomposition sont appelés **coordonnées** de u dans la base $\mathscr{B}$. On écrit : $u_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Exemple 7.2. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, où le coefficient 1 est en i-ème position. Ainsi, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, et donc $x_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Exemple 7.3. Soit $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et soit $P = X + (X-1)^3$.
Alors $P = X + X^3 + 3X^2(-1) + 3X(-1)^2 + (-1)^3 = -1 + 4X - 3X^2 + X^3$. Donc $P_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 7.4

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathscr{B}$ une base de E. L'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & u_{\mathscr{B}} \end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, à chaque vecteur de E correspond un unique vecteur colonne représentant ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

II Matrice d'une application linéaire

Dans tout ce qui suit, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p muni d'une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$.

II.1 Définition et exemples

Soit $u \in E$ et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Supposons $u_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Cherchons les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathscr{C}$ de F. On a : $f(u) = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$. Or, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) \in F$ et donc

$f(e_j)$ s'exprime de manière unique dans la base $\mathscr{C}$. Écrivons $f(e_j)_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$ les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$. Alors $f(e_j) = a_{1j}\varepsilon_1 + \ldots + a_{pj}\varepsilon_p = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\varepsilon_i$. Donc,

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\varepsilon_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j \right) \varepsilon_i.$$

Les coordonnées du vecteur $f(u)$ dans la base $\mathscr{C}$ sont donc données par :

$$f(u)_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\lambda_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\lambda_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\lambda_j \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Finalement :

$$f(u)_{\mathscr{C}} = Au_{\mathscr{B}},$$

où A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathscr{C}$ des $f(e_j)$.

Définition 7.5. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$** et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \left(f(e_1)_{\mathscr{C}} | f(e_2)_{\mathscr{C}} | \ldots | f(e_n)_{\mathscr{C}}\right).$$

Lorsque $f \in \mathscr{L}(E)$ et que $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

On en déduit donc la proposition suivante :

Proposition 7.6

On a :

(i) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$,

(ii) $\forall u \in E, \quad f(u)_{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)u_{\mathscr{B}}$,

(iii) $\forall u \in E, \ \forall v \in F, \quad [v = f(u) \Leftrightarrow v_{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)u_{\mathscr{B}}]$.

Remarque 7.7. Cette proposition indique que toute application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie peut être représentée par une matrice. De plus, calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire se résume alors à effectuer un produit matriciel.

Exemple 7.8. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = I_n$. En effet, si on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(e_1)_{\mathscr{B}} | \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(e_2)_{\mathscr{B}} | \ldots | \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(e_n)_{\mathscr{B}}\right) = (e_{1\mathscr{B}} | e_{2\mathscr{B}} | \ldots | e_{n\mathscr{B}}) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right) = I_n.$$

Exemple 7.9. Soient $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}_2[X]$ respectivement. Soit aussi :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & & P & \mapsto & P'. \end{array}$$

Pour déterminer la matrice de φ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, il suffit d'exprimer les images par φ des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{C}$. Or :

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(X) = 1, \quad \varphi(X^2) = 2X \quad \text{et} \quad \varphi(X^3) = 3X^2.$$

Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array} .$$

Exemple 7.10. Soit $P = 3X^2 - 2X + 1$ et soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons $f(P)$. On sait que : $f(P)_{\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $f(P) = 1 + 0X + 1X^2 = 1 + X^2$.

51 Soit $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\varepsilon_1 = (0,1) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = (1,0).$$

On considère l'application $\varphi \; : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0)). \end{array}$

1. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$ puis les exprimer dans la base $\mathscr{C}$.
2. En déduire la matrice de φ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ (on pourra relire l'exemple 7.9).

II.2 Lien entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $M_{p,n}(\mathbb{K})$

Proposition 7.11

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, que $g \in \mathscr{L}(E,F)$ et que $\lambda \in \mathbb{K}$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$.

Corollaire 7.12

L'application : $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

Remarque 7.13. Ce corollaire implique en particulier que :
- $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \mathbb{O}_{p,n} \iff f = \mathbb{O}_{E,F}$.
- $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = I_n \iff f = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 7.14

Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathscr{D}$. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et que $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

Corollaire 7.15

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme (i.e. f est bijective),

(ii) A est inversible.

Dans ce cas, on a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))^{-1}.$$

52 Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Soit encore :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \,. \end{array}$$

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.
2. En déduire que f est un isomorphisme et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 2$ et le déterminer.

III Changement de base

III.1 Matrice de passage

Définition 7.16. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $(e'_1, \ldots, e'_n)$ de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$, i.e. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$.

Remarque 7.17. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in M_n(\mathbb{K})$.

Exemple 7.18. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les bases : $\mathscr{B} = \big(\underbrace{(1,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1)}_{e_2}\big)$ et $\mathscr{B}' = \big(\underbrace{(0,-1)}_{e'_1}, \underbrace{(2,1)}_{e'_2}\big)$.

La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e'_1 & e'_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$. On lit cette matrice par colonnes. La première colonne signifie que $e'_1 = 0e_1 - 1e_2$, et la deuxième que $e'_2 = 2e_1 + 1e_2$.

Proposition 7.19

La matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est inversible et $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

III.2 Effet d'un changement de base

III.2.1 Sur les colonnes d'un vecteur

Proposition 7.20

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors, pour tout vecteur u de E :

$$u_{\mathscr{B}} = P u_{\mathscr{B}'}.$$

III.2.2 Sur la matrice d'un endomorphisme

Théorème 7.21 (Formule de changement de base)

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P,$$

où P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

53 Considérons l'application linéaire $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-3x-4y-2z, 8x+9y+4z, -4x-4y-z) \end{array}$.
Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie par : $\varepsilon_1 = (-1,0,2)$, $\varepsilon_2 = (-2,1,2)$ et $\varepsilon_3 = (-1,2,-1)$.
Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ et interpréter f géométriquement.

IV Rang d'une matrice

IV.1 Définition et propriétés

Définition 7.22. Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle **rang** de A et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de l'application :

$$\begin{array}{ccc} M_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & M_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX. \end{array}$$

Proposition 7.23

Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors :

(i) le rang de A est le rang de la famille formée par ses vecteurs colonnes,

(ii) $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(p, n)$,

(iii) $\mathrm{rg}(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{O}_{p,n}$,

(iv) Si $n = p$, alors A est inversible ssi $\mathrm{rg}(A) = n$.

Remarque 7.24. Le rang d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F de dimension finie est égal au rang de sa matrice relativement à deux bases quelconques de E et de F[1].

IV.2 Calcul du rang

Théorème 7.25

Le rang d'une matrice échelonnée par colonnes est le nombre de colonnes non nulles.

Théorème 7.26

Le rang d'une matrice est inchangé si on effectue une des opérations suivantes sur ses colonnes :

i) permutation de deux colonnes C_i et C_j ($C_i \leftrightarrow C_j$),

ii) multiplication d'une colonne C_i par $a \neq 0$ ($C_i \leftarrow aC_i$),

iii) addition à une colonne C_i d'un multiple aC_j d'une autre colonne C_j ($C_i \leftarrow C_i + aC_j$).

Remarque 7.27. Pour déterminer le rang d'une matrice, on peut donc utiliser la méthode du pivot de Gauss sur ses colonnes. Une fois la matrice échelonnée, il n'y a plus qu'à compter le nombre de colonnes non nulles.

Exemple 7.28. Déterminons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 5C_1 \end{array} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2 \end{array} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2. \end{aligned}$$

1. Ce résultat est une conséquence du corollaire 6.32.