Exercice 1. Démontrer que

$$\left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]), \quad \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = f(1) \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1])$.

Exercice 2. L'ensemble des suites arithmétiques est-il un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites ? Le démontrer.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la famille :

$$\mathcal{F} = ((1,1,2),(1,2,3),(0,1,1),(0,1,0)).$$

1. $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
2. $\mathcal{F}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère la famille

$$\mathcal{F} = \left(1+X, 1-X^2\right).$$

1. $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
2. $\mathcal{F}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?
3. $\mathcal{F}$ est-elle génératrice de $\mathrm{Vect}\,(1+X, 1-X^2)$?

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel réel et $(u,v) \in E^2$. En utilisant uniquement la caractérisation des sous-espaces vectoriels, démontrer que $\mathrm{Vect}(u,v)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6. Soit E l'ensemble des suites réelles et soit :

$$F = \left\{ (u_n)_n \in E,\ u_0 + 3u_3 = 0 \right\}.$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 7. L'ensemble des matrices symétriques de taille 3×3 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 8. On considère l'ensemble :

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + 2z - t = 0 \right\}.$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de F.

Exercice 9. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, 1+X, 1+X+X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ puis déterminer les coordonnées du polynôme $P = 1 - X^2$ dans cette base.

Exercice 10. Déterminer le rang de la famille suivante de vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{F} = ((1,1,0,2),(-1,2,2,1),(1,2,3,4),(-2,3,1,0))$$

En déduire sans calcul si $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11. Soit F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' - y = 0.$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble E des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.