Exercice 1. Fonctions de deux variables

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On considère la fonction $f\colon (x,y) \mapsto \ln(1-x^2-y^2)$.
   (a) Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition de f.
   (b) Soit $\alpha > 0$. Déterminer $\mathscr{L}_{-\alpha}$ la ligne de niveau $-\alpha$ de f.
2. Soit f la fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

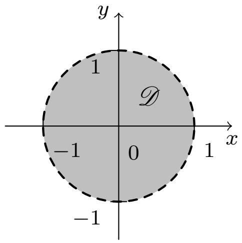
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

   (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer l'équation du plan tangent à f au point de coordonnées $(1,-1,f(1,-1))$.
   (c) Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f.
   (d) Étudier la nature de ce(s) point(s) critique(s).

Correction. 1. (a) La fonction ln étant définie sur $]0,+\infty[$, le domaine de définition de f est :

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1-x^2-y^2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < 1\} = B\left((0,0),1\right),$$

où $B\left((0,0),1\right)$ est la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1.



(b) Soit $\alpha > 0$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in L_{-\alpha} &\iff f(x,y) = -\alpha \\
&\iff \ln(1-x^2-y^2) = -\alpha \\
&\iff 1-x^2-y^2 = \mathrm{e}^{-\alpha} \\
&\iff x^2+y^2 = 1-\mathrm{e}^{-\alpha} \\
&\iff x^2+y^2 = \left(\sqrt{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}\right)^2 \quad \text{car } \mathrm{e}^{-\alpha} < 1 \text{ puisque } \alpha > 0.
\end{aligned}$$

Ainsi la ligne de niveau $-\alpha$ de f est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}$.

2. (a) Les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont données par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y = 4(x^3-y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x = 4(y^3-x). \end{cases}$$

(b) L'équation du plan tangent $\mathscr{P}$ à la surface représentative de f au point de coordonnées $(1,-1,f(1,-1))$ est :

$$z = f(1,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) \times (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) \times (y-(-1)).$$

$f(1,-1) = 6$ et d'après la question 2a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = 8$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -8$. D'où l'équation de $\mathscr{P}$: $z = 6 + 8(x-1) - 8(y-1)$, ou encore $z = -10 + 8x - 8y$.

(c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question 2a,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4(x^3-y) = 0 \\ 4(y^3-x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^3 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^8-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^3 \\ x(x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+1)(x^4+1)}_{>0} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x^3 \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases} \iff (x,y) \in \big\{(0,0);(1,1);(-1,-1)\big\}.$$

Donc les points critiques de f sont : $a = (0,0)$, $b = (1,1)$ et $c = (-1,-1)$.

(d) f étant de classe $\mathscr{C}^2$, on peut calculer ses dérivées partielles secondes :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12y^2. \end{cases}$$

- Nature du point a. On utilise les notations de Monge, i.e.

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 0, \ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = -4, \ t = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0.$$

  On a : $rt - s^2 = -(-4)^2 = -16$. Ainsi $rt - s^2 < 0$, donc f n'admet pas d'extremum local en a, mais a est un point selle.
- Nature du point b. On pose maintenant :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(b) = 12, \ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = -4, \ t = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 12.$$

  Alors $rt - s^2 = 12 \times 12 - (-4)^2 = 128$. On a donc $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, donc f admet en b un minimum local.
- Nature du point c. On vérifie facilement que les notations de Monge s'écrivent encore dans ce cas $r = 12$, $s = -4$ et $t = 12$, ce qui implique d'après le point précédent que f admet en c un minimum local.