Examen final

MT2A-MT2B-MT2D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1 : algèbre linéaire - Correction (9 points)

1. (a) On remarque que :

$$\begin{aligned}(X-1)^2 &= X^2-2X+1,\\ (X-1)(X+1) &= X^2-1,\\ (X+1)^2 &= X^2+2X+1.\end{aligned}$$

Pour démontrer que $\mathscr{C}$ est une base, on peut échelonner la matrice colonne des coordonnées de ces polynômes dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&0&2\\1&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-2&4\\1&2&0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}C_2 \leftarrow C_2+C_1\\ C_3 \leftarrow C_3-C_1\end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-2&0\\1&2&4\end{pmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3+2C_2$$

On en déduit que le rang de la famille est 3. De plus, elle est maximale car $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3. Ainsi, $\mathscr{C}$ est une base de F.

(b) Par définition, la matrice de passage exprime les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base en fonction des vecteurs de l'ancienne base :

$$Q = \begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

(c) On obtient :

$$Q^2 = \begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&0&2\\1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

Comme $Q^2 = 4I_3$, on en déduit que Q est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4}Q$. De plus, d'après le cours, la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_0$ est l'inverse de Q.

(d) On utilise la formule du cours :

$$(1+X-X^2)_{\mathscr{C}} = Q^{-1}(1+X-X^2)_{\mathscr{C}_0} = \frac{1}{4}Q\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-2 & 0 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-1\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

(a) Soit $(\lambda, P_1, P_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} f\left(\lambda P_1 + P_2\right) &= \left(\lambda P_1 + P_2\right)(1)(X-1)^2 + \left(\lambda P_1 + P_2\right)(2)(X+1)^2 \\ &= \left(\lambda P_1(1) + P_2(1)\right)(X-1)^2 + \left(\lambda P_1(2) + P_2(2)\right)(X+1)^2 \\ &= \lambda P_1(1)(X-1)^2 + P_2(1)(X-1)^2 + \lambda P_1(2)(X+1)^2 + P_2(2)(X+1)^2 \\ &= \lambda f(P_1) + f(P_2) \end{aligned}$$

L'application f est donc bien linéaire.

(b) Par définition :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (X-1)^2 \\ (X-1)(X+1) \\ (X+1)^2 \end{array}.$$

(c) On échelonne A pour déterminer son rang :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 2 & 4 & 8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 3 & 7\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 7C_2 \end{array}$$

On en déduit que A est de rang 2. Pour déterminer la dimension du noyau de f, on peut utiliser le théorème du rang :

$$\dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg(f)},$$

ce qui implique que le noyau de f est de dimension 2.

(d) À l'aide des deux premières colonnes de la matrice A, on remarque que :

$$f(X-1) = f(X) - f(1) = (X+1)^2,$$

et que

$$f(2-X) = 2f(1) - f(X) = (X-1)^2,$$

ce qui démontre que $(X+1)^2$ et $(X-1)^2$ sont dans l'image de f. Or, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : ils forment donc une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$. Enfin, l'image de f étant de dimension 2, ils forment une base de cet espace.

Exercice 2 : analyse - Correction (11 points)

1. (a) Soit t au voisinage de 0.

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-u} \quad \text{où } u = -t^2.$$

u est au voisinage de 0 donc :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^2 + u^2\varepsilon_1(u) \quad \text{avec} \lim_{u\to 0} \varepsilon_1(u) = 0.$$

En remplaçant u par $-t^2$, on obtient :

$$\arctan'(t) = 1 - t^2 + t^2\varepsilon_2(t) \quad \text{avec} \lim_{t\to 0} \varepsilon_2(t) = 0.$$

En intégrant ce développement limité, on obtient le développement limité à l'ordre 3 en 0 de arctan :

$$\arctan(t) = \arctan(0) + t - \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t) \quad \text{avec} \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

Piques $\arctan(0) = 0$, il vient :

$$\boxed{\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t)}.$$

(b) Par définition de f on a $f(0) = 1$ et pour tout t non nul au voisinage de 0 :

$$f(t) = \frac{\arctan t}{t}.$$

Donc d'après la question précédente :

$$f(t) = \frac{t - \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon_(t)}{t} = 1 - \frac{t^2}{3} + t^2\varepsilon(t).$$

Cette égalité est encore vraie pour $t = 0$ car $f(0) = 1$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par, pour tout t au voisinage de 0 :

$$\boxed{f(t) = 1 - \frac{t^2}{3} + t^2\varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0}.$$

(c) Puisque f admet un DL à l'ordre 2 en 0, f admet un DL à l'ordre 1 en 0. Par conséquent, $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0}$ et $f'(0)$ est le coefficient du monôme de degré 1 dans la partie polynomiale du DL à l'ordre 1 de f en 0. D'après la question précédente, ce DL est donné par :

$$f(t) = 1 + t\varepsilon_0(t) = 1 + 0 \times t + t\varepsilon_0(t) \quad \text{avec} \lim_{t\to 0} \varepsilon_0(t) = 0.$$

On en déduit : $\boxed{f'(0) = 0}$.

(d) On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f(t) = \frac{\arctan(t)}{t}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \boxed{f'(t)} &= \frac{\arctan'(t) \times t - \arctan(t) \times 1}{t^2} \\ &= \frac{\frac{1}{1+t^2} \times t - \arctan(t)}{t^2} \\ &= \frac{t}{(1+t^2)\,t^2} - \frac{\arctan(t)}{t^2} \\ &= \boxed{\frac{1}{(1+t^2)\,t} - \frac{\arctan(t)}{t^2}}.\end{aligned}$$

2. (a) La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $F' = f$.
Soit g la fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y).$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)} = xF'(xy) - F'(y) \boxed{= xf(xy) - f(y)}.$$

(b) Rappelons qu'un point critique de g est un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Supposons $x = 0$. D'après la question précédente :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y \times f(0) - f(0) = y \times 1 - 1 = y - 1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \times f(0) - f(y) = -f(y). \end{cases}$$

Ainsi,
— si $y \neq 1$ alors $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \neq 0$ et (x,y) n'est pas un point critique de g ;
— si $y = 1$ alors $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -f(1) = -\dfrac{\arctan(1)}{1} = -\dfrac{\pi}{4}$ et donc $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \neq 0$, donc (x,y) n'est pas un point critique de g.

Par conséquent, si $x = 0$, alors (x,y) n'est pas un point critique de g.

- Supposons $y = 0$. D'après la question précédente :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \times f(0) - f(x) = -f(x) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x \times f(0) - f(0) = x \times 1 - 1 = x - 1. \end{cases}$$

  En raisonnant comme précédemment, on en déduit que (x, y) n'est pas un point critique de g.

$\boxed{\text{On en conclut que si } x = 0 \text{ ou } y = 0, \text{ alors } (x,y) \text{ n'est pas un point critique de } g.}$

(c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question précédente, si $x = 0$ ou $y = 0$, alors (x, y) n'est pas un point critique de g. On suppose donc : $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}
&\iff \begin{cases} yf(xy) - f(x) = 0 \\ xf(xy) - f(y) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y\dfrac{\arctan(xy)}{xy} - \dfrac{\arctan(x)}{x} = 0 & \text{car } xy \neq 0 \text{ et } x \neq 0 \\ x\dfrac{\arctan(xy)}{xy} - \dfrac{\arctan(y)}{y} = 0 & \text{car } xy \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(\arctan(xy) - \arctan(x)\right) = 0 \\ \dfrac{1}{y}\left(\arctan(xy) - \arctan(y)\right) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \arctan(xy) - \arctan(x) = 0 \\ \arctan(xy) - \arctan(y) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \arctan(xy) = \arctan(x) \\ \arctan(xy) = \arctan(y) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} xy = x \\ xy = y \end{cases} \quad \text{car la fonction arctan est bijective} \\
&\iff \begin{cases} y = 1 & \text{car } x \neq 0 \\ x = 1 & \text{car } y \neq 0 \end{cases} \\
&\iff (x,y) = (1,1).
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ admet donc un unique point critique qui est } a = (1,1)}$.

(d) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = yf(xy) - f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = xf(xy) - f(y).$$

Donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = y^2 f'(xy) - f'(x) \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \times f(xy) + xyf'(xy) \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = x^2 f'(xy) - f'(y). \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a)} = 1 \times f'(1) - f'(1) = \boxed{0} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a) = f(1) + 1 \times f'(1) \\ \boxed{\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a)} = 1 \times f'(1) - f'(1) = \boxed{0}. \end{cases}$$

Or, d'après la question 1(d), on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f'(t) = \frac{1}{(1+t^2)\,t} - \frac{\arctan(t)}{t^2}.$$

D'où

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a)} = \frac{\arctan(1)}{1} + \left(\frac{1}{(1+1^2)\,1} - \frac{\arctan(1)}{1^2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(e) Introduisons les notations de Monge en a :

$$r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a) = 0.$$

Alors, d'après 2(d),

$$r = 0, \quad s = \frac{1}{2}, \quad t = 0.$$

Donc $rt - s^2 < 0$. On en déduit que la fonction g n'admet pas d'extremum local au point a, mais que le point a est un point col pour g. Sachant que les extrema d'une fonction sont atteints en des points critiques et que le seul point critique de g est le point a, on en déduit que $\boxed{\text{la fonction } g \text{ n'admet pas d'extremum}}$.

Exercice 1 : Barème (9 points)

1. (a) **1,5 points** dont :
   - *1 pt* pour la calcul du rang de $\mathscr{C}$ ou pour les calculs de résolution du système d'une famille libre. Enlever 0,5 pt si la définition de famille libre est fausse.
   - *0,5 pt* pour justifier que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

   (b) **0,5 point** pour donner $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) **1 point** dont :
   - *0,5 pt* pour la calcul de Q^2
   - *0,5 pt* pour dire que la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_0$ est $\dfrac{1}{4}Q$.

   (d) **1 point** pour justifier que les coordonnées de $1+X-X^2$ dans la base $\mathscr{C}$ sont $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2. (a) **1 point** pour démontrer que f est linéaire dont :
   - *0,5 pt* pour introduire les notations λ, P_1 et P_2
   - *0,5 pt* pour démontrer que $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$

   (b) **1,5 point** dont :
   - *0,25 pt* pour la calcul de $f(1)$
   - *0,25 pt* pour la calcul de $f(X)$
   - *0,25 pt* pour la calcul de $f(X^2)$
   - *0,25 pt* pour la calcul de $f(X^3)$
   - *0,5 pt* pour donner $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

   Compter 0,5 point si la matrice est fausse mais que les explications de "colonnes" et "lignes" sont justes.

   (c) **1 point** dont :
   - *0,5 pt* pour le calcul de $\mathrm{rg}(A)$
   - *0,5 pt* pour le théorème du rang

   (d) **1,5 points** dont :
   - *0,5 pt* pour justifier $(X-1)^2 \in \mathrm{Im}(f)$
   - *0,5 pt* pour justifier $(X+1)^2 \in \mathrm{Im}(f)$
   - *0,5 pt* pour justifier que ces deux vecteurs forment une base de $\mathrm{Im}(f)$

Exercice 2 : Barème (11 points)

1. (a) **1,5 points** pour établir le $DL_3(0)$ de arctan

   (b) **0,5 point** pour en déduire celui de f

   (c) **1 point** dont :
   - *0,5 pt* pour justifier que f est dérivable en 0
   - *0,5 pt* pour dire que $f'(0) = 0$

   Compter 0,75 point en tout si la justification de $f'(0) = 0$ est faite proprement avec la formule de Taylor-Young mais son justifier que f est dérivable en 0.

(d) **1 point** pour calculer f'

2. (a) **1 point** pour donner $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = xf(xy) - f(y)$

   (b) **1 point** dont :
   - *0,5 pt* pour simplifier les dérivées partielles lorsque $x = 0$ ou $y = 0$
   - *0,5 pt* pour justifier qu'au moins une deux dérivées partielles est non nulle lorsque $x = 0$ (ou $y = 0$)

   (c) **2 points** pour résoudre le système de recherche des points critiques
   Enlever 0,5 pt si les $\iff$ ne sont pas présents.

   (d) **2 points** dont :
   - *1 pt* pour obtenir $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a) = 0$
   - *1 pt* pour obtenir $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a) = \dfrac{1}{2}$

   (e) **1 point** dont :
   - *0,5 pt* pour montrer que g n'admet pas d'extremum local en a
   - *0,5 pt* pour justifier que g n'admet aucun extremum