Examen final

MT2A-MT2B-MT2D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1 : algèbre linéaire (9 points)

On se place dans l'espace vectoriel réel $F = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{C}_0 = \big(1, X, X^2\big)$.

1. (a) Démontrer que la famille $\mathscr{C} = \big((X-1)^2\,,\,(X-1)(X+1)\,,\,(X+1)^2\big)$ est une base de F.
   (b) Donner la matrice de passage Q de la base canonique $\mathscr{C}_0$ vers la base $\mathscr{C}$.
   (c) Calculer Q^2. En déduire la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_0$.
   (d) Déterminer les coordonnées du polynôme $1 + X - X^2$ dans la base $\mathscr{C}$.
2. On note $\mathscr{B} = \big(1, X, X^2, X^3\big)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}_3[X]$.
   On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ P(X) & \longmapsto & P(1)\,(X-1)^2 + P(2)\,(X+1)^2 \end{array}$$

   (a) Prouver que f est une application linéaire.
   (b) Calculer la matrice A de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
   (c) Déterminer le rang de A.
   En déduire la dimension du noyau de f.
   (d) Justifier que $(X-1)^2$ et $(X+1)^2$ appartiennent à l'image de f.
   En déduire une base de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 2 : analyse (11 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{\arctan t}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

1. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction arctan.
   (b) En déduire que f admet pour développement limité à l'ordre 2 en 0 :
   $$f(t) = 1 - \frac{t^2}{3} + t^2\varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$
   (c) f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur de $f'(0)$.
   (d) Calculer $f'(t)$ pour tout réel t non nul.
2. On définit à présent la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
   et la fonction g sur $\mathbb{R}^2$ par :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y).$$
   On admet que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On admet que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y\, f(xy) - f(x)$.
   Donner une expression similaire pour $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$.
   (b) Montrer que si $x = 0$ ou $y = 0$ alors (x,y) n'est pas un point critique de g.
   (c) Démontrer que g admet $a = (1,1)$ comme unique point critique.
   (d) Prouver que :
   $$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a) = 0 \quad \text{et que} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a) = \frac{1}{2}.$$
   (e) La fonction g présente-t-elle un extremum sur $\mathbb{R}^2$?