Corrigé de l'examen final

MT2A-MT2B-MT2D

Exercice 1 : algèbre linéaire (7 points)

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit l'application

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P(X) & \longmapsto & \big(P(1)\,,\,P(2)\,,\,P(3)\,\big). \end{array}$$

1. (a) Soient Q et R deux polynômes appartenant à E. Soit λ un nombre réel.

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot Q+R) &= \big((\lambda\cdot Q+R)(1)\,,\,(\lambda\cdot Q+R)(2)\,,\,(\lambda\cdot Q+R)(3)\,\big) \\ &= \big(\lambda\,Q(1)+R(1)\,,\,\lambda\,Q(2)+R(2)\,,\,\lambda\,Q(3)+R(3)\,\big) \\ &= \big(\lambda\,Q(1)\,,\,\lambda\,Q(2)\,,\,\lambda\,Q(3)\,\big) + \big(R(1),R(2),R(3)\big) \\ &= \lambda\cdot\big(Q(1),Q(2),Q(3)\big) + \big(R(1),R(2),R(3)\big) \\ &= \lambda\cdot f(Q)+f(R) \end{aligned}$$

   Donc f est une application linéaire.

   (b) Soit $P \in \mathrm{Ker} f$. Alors $f(P) = (0,0,0)$. D'où $(P(1), P(2), P(3)) = (0,0,0)$ puis $P(1) = P(2) = P(3) = 0$.
   Donc P est un polynôme de degré au plus 2, qui admet au moins 3 racines deux à deux distinctes.
   Par conséquent P ne peut être que le polynôme nul.
   Ainsi $P = 0_E$ et $\mathrm{Ker} f \subset \{0_E\}$. Or l'inclusion $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker} f$ est connue.
   Donc $\boxed{\mathrm{Ker} f = \{0_E\}}$ ce qui revient à dire que f est injective.

   De plus f est une application linéaire entre deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels de même dimension finie, égale à 3. L'injectivité de f entraîne sa bijectivité.
   Finalement f est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^3$.

2. Pour chaque entier $i \in [\![1,3]\!]$, on pose $Q_i = f^{-1}(e_i)$.

   (a) On sait que la bijection réciproque de f, notée f^{-1}, est une application **linéaire bijective** de $\mathbb{R}^3$ dans E.
   Or $\mathcal{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est l'image par f^{-1} d'une base de $\mathbb{R}^3$.
   Donc $\mathcal{B}'$ est une base de E.

   (b) Soit P un polynôme quelconque de E. Puisque $f^{-1}\circ f = \mathrm{id}_E$,

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{id}_E(P) = (f^{-1}\circ f)(P) = f^{-1}\big(f(P)\big) \\ &= f^{-1}\big(\,(P(1)\,,\,P(2)\,,\,P(3))\,\big) \text{ par définition de } f \\ &= f^{-1}\left(P(1)\cdot e_1 + P(2)\cdot e_2 + P(3)\cdot e_3\right) \\ &= P(1)\cdot f^{-1}(e_1) + P(2)\cdot f^{-1}(e_2) + P(3)\cdot f^{-1}(e_3) \text{ par linéarité de } f^{-1} \\ &= P(1)\cdot Q_1 + P(2)\cdot Q_2 + P(3)\cdot Q_3 \end{aligned}$$

On en déduit que P a pour coordonnées $\begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ P(3) \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Soit M la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   Alors M est inversible et son inverse M^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$
   La $j-$ème colonne de M^{-1} est la matrice colonne des coordonnées de $f^{-1}(X^{j-1})$ dans la base (Q_1, Q_2, Q_3).
   On obtient donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 \\ 3^0 & 3^1 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

4. (a) $f(Q_2) = e_2$ signifie que $\big(Q_2(1)\,,\, Q_2(2)\,,\, Q_3(3)\big) = (0, 1, 0)$

   $$\text{c'est-à-dire que } \begin{cases} Q_2(1) = 0 \\ Q_2(2) = 1 \\ Q_2(3) = 0 \end{cases}$$

   Donc le polynôme $Q_2(X)$, qui est de degré au plus 2, admet pour racines 1 et 3. Par conséquent il existe un réel λ tel que $Q_2(X) = \lambda \cdot (X-1)(X-3)$.
   Or $Q_2(2) = 1$. D'où $(2-1)(2-3)\lambda = 1$ puis $\lambda = -1$.
   Donc $\boxed{Q_2(X) = -(X-1)(X-3) = -(X^2 - 3X - X + 3) = -3 + 4X - X^2}$

   (b) La deuxième colonne de M est formée des coordonnées de $Q_2(X)$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E.
   Donc $\quad M = \begin{pmatrix} \star & -3 & \star \\ \star & 4 & \star \\ \star & -1 & \star \end{pmatrix}$

Exercice 2 : développements limités ($3,5$ points)

On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2\sqrt{1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}}{x-1}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Soit h au voisinage de 0.

$$g(h) = \frac{\sqrt{1+\sin(h)}}{1-h} = (1+\sin(h))^{1/2} \times \frac{1}{1-h}.$$

- Pour tout u au voisinage de 0, on a : t

$$\begin{aligned}(1+u)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}u + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}u^2 + u^2\varepsilon_1(u)\\ &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2\varepsilon_1(u)\end{aligned}$$

où $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon_1(u) = 0$.
Posons $u = \sin(h)$. Alors u est au voisinage de 0 car $\lim\limits_{h\to 0}\sin(h) = 0$.
  - $u = \sin(h) = h + h^2\varepsilon_2(h)$ où $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0$
  - $u^2 = \left(h + h^2\varepsilon_2(h)\right)^2 = h^2 + h^2\varepsilon_3(h)$ où $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_3(h) = 0$.

  On en déduit que :

$$(1+\sin(h))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + h^2\varepsilon_4(h),$$

où $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_4(h) = 0$.

- $\dfrac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^2\varepsilon_5(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_5(h) = 0$.
- Ainsi,

$$\begin{aligned}\boxed{g(h)} &= \left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + h^2\varepsilon_5(h)\right) \times \left(1 + h + h^2 + h^2\varepsilon_1(h)\right)\\ &= \left(1+h+h^2\right) + \left(\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h^2\right) + \left(-\frac{1}{8}h^2\right) + h^2\varepsilon_6(h)\\ &\boxed{= 1 + \frac{3}{2}h + \frac{11}{8}h^2 + h^2\varepsilon_6(h)},\end{aligned}$$

où $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_6(h) = 0$.

2. Soit x au voisinage de $+\infty$. Posons $h = \dfrac{1}{x}$.

$$\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) = h\frac{\left(\frac{1}{h}\right)^2\sqrt{1+\sin(h)}}{\frac{1}{h}-1} = \frac{\sqrt{1+\sin(h)}}{1-h} = g(h).$$

h est au voisinage de 0 donc, d'après la question 1,

$$g(h) = 1 + \frac{3}{2}h + \frac{11}{8}h^2 + h^2\varepsilon_6(h).$$

On en déduit que, pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{11}{8}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= 1 + \frac{3}{2x} + \frac{11}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x),\end{aligned}$$

où $\varepsilon(x) = \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En multipliant par x, on en déduit l'égalité :

$$\boxed{f(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{11}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x).}$$

3. D'après l'égalité précédente,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{11}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)\right) = 0.$$

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote Δ d'équation $\boxed{y = x + \frac{3}{2}}$.

4. Soit x au voisinage de $+\infty$. On a

$$f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{11}{8} + \varepsilon(x)\right).$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$, donc $\frac{11}{8} + \varepsilon(x) > 0$. D'autre part, $\frac{1}{x} > 0$. On en déduit que :

$$f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right) > 0.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty, \text{ la courbe } \mathscr{C}_f \text{ est située au-dessus de } \Delta}$.

Exercice 3 : intégration (3,5 points)

On admet qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

1. D'après $(\star)$, $\varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)$, c'est-à-dire $\varphi(0) = 2\varphi(0)$. D'où $\boxed{\varphi(0) = 0}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) D'après la propriété $(\star)$,

$$\forall y \in [0,1], \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi(x+y)\ \mathrm{d}y &= \int_0^1 (\varphi(x)+\varphi(y))\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \varphi(x)\ \mathrm{d}y + \int_0^1 \varphi(y)\ \mathrm{d}y \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \varphi(x)\int_0^1 1\ \mathrm{d}y + \int_0^1 \varphi(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \varphi(x)(1-0) + \int_0^1 \varphi(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \varphi(x) + \int_0^1 \varphi(y)\ \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\varphi(x) = \int_0^1 \varphi(x+y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y}.$$

(b) Effectuons le changement de variable $t = x+y$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x+y)\,\mathrm{d}y$. La fonction $y \mapsto x+y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. On a :

- $\mathrm{d}t = \mathrm{d}y$.
- $y = 0 \iff t = x$
- $y = 1 \iff t = x+1$

On obtient alors, par changement de variable :

$$\int_0^1 \varphi(x+y)\,\mathrm{d}y = \int_x^{x+1} \varphi(t)\ \mathrm{d}t.$$

En remplaçant dans l'égalité de la question précédente, on en déduit l'égalité :

$$\boxed{\varphi(x) = \int_x^{x+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y}.$$

3. La fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit Φ une primitive de φ. Alors, d'après la question précédente, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \Phi(x+1) - \Phi(x) - \int_0^1 \varphi(y)\ \mathrm{d}y.$$

$\boxed{\text{La fonction } \Phi \text{ étant dérivable sur } \mathbb{R}\text{, on en déduit que } \varphi \text{ l'est aussi}}$ (comme différence de fonctions dérivables) et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = 1 \times \Phi'(x+1) - \Phi'(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x).$$

D'après $(\star)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x+1) = \varphi(x) + \varphi(1).$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \varphi(1)}.$$

4. D'après la question précédente, il existe une constante reélle c telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(1) \times x + c.$$

En particulier, on a $\varphi(0) = \varphi(1) \times 0 + c = c$. D'après la question 1, $\varphi(0) = 0$. D'où $c = 0$. Par conséquent, $\boxed{\varphi \text{ est une fonction linéaire}}$ puisque :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(1) \times x}.$$

Exercice 4 : fonctions de deux variables (7 points)

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} f(x,y) \text{ existe } &\iff x^2+y^2 \in [-1,1] \\ &\iff x^2+y^2 \leqslant 1 \end{aligned}$$

Le domaine de défintion $\mathscr{D}$ de f est donc le disque (fermé) de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

2. On rappelle que la ligne de niveau t de f est définie par :

$$\mathscr{L}_t = \{(x,y) \in \mathscr{D},\ f(x,y) = t\}.$$

(a) Si $(x,y) \in \mathscr{D}$, alors $x^2+y^2 \in [0,1]$. Or :

$$\forall z \in [0,1], \quad \arccos(z) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

On en déduit que la fonction f est à valeurs dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, $\mathscr{L}_t$ est vide lorsque $t \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Soient $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $(x,y) \in \mathscr{D}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x,y) = t &\iff \arccos(x^2+y^2) = t \\ &\iff x^2+y^2 = \cos(t) \qquad\qquad (\text{ et } \cos(t) \geqslant 0) \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{\cos(t)}$.

3. La figure correspondante est la (b).

4. (a) Pour tout $(x,y) \in \mathscr{D}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}. \end{aligned}$$

(b) D'après le cours, le plan tangent $\mathscr{P}$ a pour équation :

$$z = f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right).$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{\sqrt{3}}.$$

De plus,

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Finalement, après simplification, l'équation du plan tangent est donnée par :

$$z = \frac{\pi+2\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\,x - \frac{2}{\sqrt{3}}\,y.$$

(c) On rappelle qu'un point critique est un point où les deux dérivées partielles sont nulles. Or, pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \iff -2x = 0 \iff x = 0.$$

De même :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff -2y = 0 \iff y = 0.$$

On en déduit que l'unique point critique de f sur U est $(0, 0)$.

(d) On a :

$$f(0, 0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Or, on a vu que :

$$\forall (x, y) \in \mathscr{D}, \quad f(x, y) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, f admet un maximum global en $(0, 0)$.

5. D'après les calculs effectués à la deuxième question, l'aire $A(t)$ recherchée est celle d'un disque de rayon $\sqrt{\cos(t)}$. D'où :

$$A(t) = \pi \sqrt{\cos(t)}^2 = \pi \cos(t).$$

6. D'après l'indication donnée dans l'énoncé, le volume V recherché est :

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos(t) \, \mathrm{d}t = \Big[\pi \sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi \sin(0) = \pi.$$