utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

Examen final

MT2A-MT2B-MT2D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Partie A : à rédiger sur une feuille à part

Exercice 1 : algèbre linéaire (7 points)

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3)) \end{array}$$

1. (a) Vérifier que f est une application linéaire.
   (b) Déterminer son noyau. En déduire que f est bijective.
2. Pour chaque entier $i \in [\![1, 3]\!]$, on pose $Q_i = f^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par f est e_i.
   (a) Justifier que $\mathscr{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de E.
   (b) Soit P un polynôme quelconque de E. En remarquant que $P = f^{-1}\big(f(P)\big)$, déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}'$.
3. Dans la suite de l'exercice, on note M la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
   On ne demande pas de calculer cette matrice M.
   Expliciter M^{-1} en utilisant la question 2.(b).
4. (a) On rappelle que $f(Q_2) = e_2$. Donner les valeurs de $Q_2(1)$, $Q_2(2)$ et $Q_2(3)$.
   Calculer le polynôme $Q_2(X)$ sous forme développée.
   (b) En déduire la deuxième colonne de M.

Partie B : à rédiger sur une feuille à part

Exercice 2 : développements limités (3,5 points)

On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2\sqrt{1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}}{x-1}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction :
$$g \ : \ h \mapsto \frac{\sqrt{1+\sin(h)}}{1-h}.$$
2. En déduire que pour x au voisinage de $+\infty$ on a :
$$f(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{11}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0.$$
3. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote Δ dont on précisera l'équation.
4. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 : intégration (3,5 points)

On admet qu'il existe une fonction $\varphi \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

1. Calculer $\varphi(0)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) En utilisant la propriété $(\star)$, démontrer l'égalité ci-dessous :
   $$\varphi(x) = \int_0^1 \varphi(x+y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$
   (b) À l'aide d'un changement de variable simple, en déduire l'égalité :
   $$\varphi(x) = \int_x^{x+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$
3. En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout réel x.
4. À l'aide des questions 3. et 1., prouver que φ est une fonction linéaire.

Partie C : à rédiger sur une feuille à part

Exercice 4 : fonctions de deux variables (7 points)

Soit f la fonction donnée par :

$$f\colon (x,y) \mapsto \arccos(x^2+y^2)$$

Dans tout l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Soit t un nombre réel et $\mathscr{L}_t$ la ligne de niveau t de f.
   (a) Justifier que $\mathscr{L}_t$ est vide lorsque $t \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Déterminer $\mathscr{L}_t$ lorsque $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Indiquer dans la figure 1 la surface qui représente la fonction f
   (on ne demande pas de justification).
4. On note U l'intérieur du disque unité :

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x^2+y^2 < 1\right\}$$

   et on admet que f admet des dérivées partielles sur U.
   (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f en tout point (x,y) de U.
   (b) Donner l'équation réduite du plan tangent à la surface représentative de f au point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.
   (c) Démontrer que f admet $(0,0)$ comme unique point critique sur U.
   (d) Calculer $f(0,0)$ et en déduire que f admet un maximum global en $(0,0)$.
5. Dans cette question, on admettra et on utilisera le résultat suivant :
   soit (Σ) un solide compris entre les plans d'équations $z=a$ et $z=b$ où a et b sont deux réels tels que $a<b$. Si, pour tout réel $t \in [a,b]$, on note $A(t)$ l'aire de la section de (Σ) par le plan d'équation $z=t$, et si la fonction $t \mapsto A(t)$ est continue sur le segment $[a,b]$, alors le volume $v(\Sigma)$ du solide (Σ) est donné par l'intégrale :

$$v(\Sigma) = \int_a^b A(t)\,\mathrm{d}t$$

   On pourra se référer à la figure 2 pour une illustration de ce résultat.

   On cherche ici à calculer le volume du solide (Σ) situé au-dessus du plan $(0xy)$ et en dessous de la surface représentative de f.

   (a) Soit t un nombre réel tel que $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.
   Déterminer l'aire $A(t)$ de la section de (Σ) par le plan d'équation $z=t$.
   (b) En déduire le volume recherché.

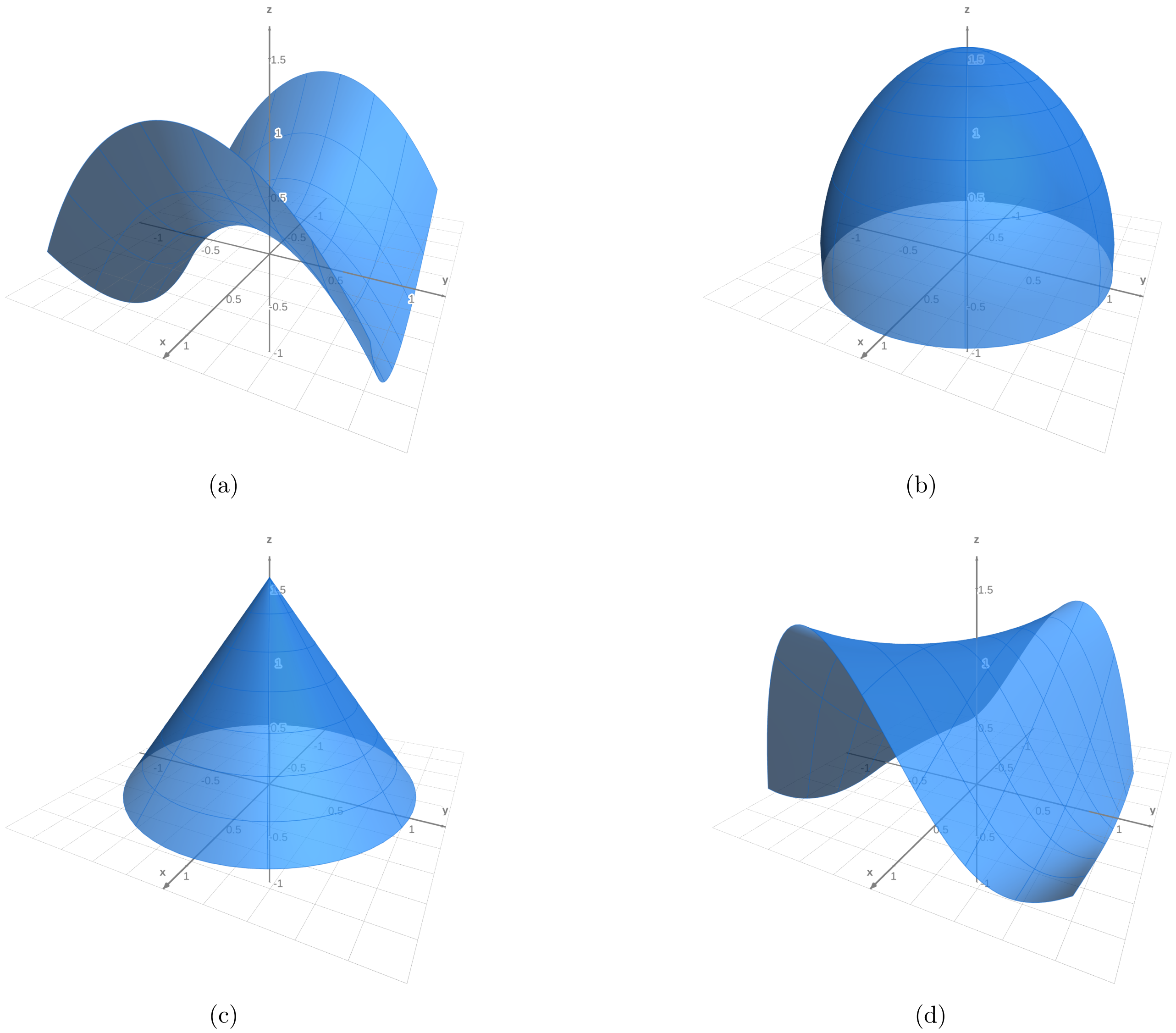

FIGURE 1 – Quel graphe correspond au tracé de la surface représentative de f ?

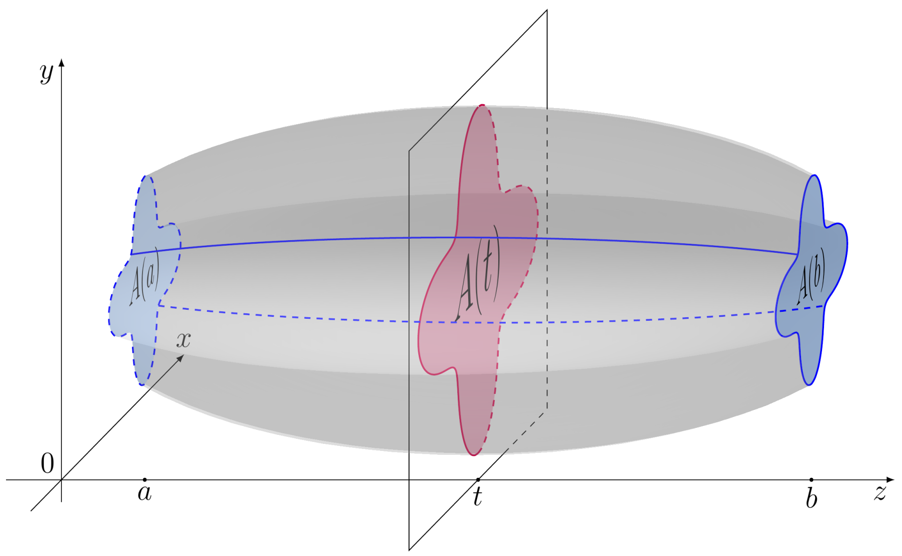

FIGURE 2 – Calcul d'un volume d'un solide par découpage selon l'axe (Oz)