

NOM : _____ Prénom : _____ Groupe : _____



Examen final

MT2A-MT2B-MT2D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Chaque étudiant rendra 3 copies (une copie pour l'exercice 2, une copie pour la partie A de l'exercice 3 et une copie pour la partie B de l'exercice 3) ainsi que la première feuille du sujet pour l'exercice 1.

Exercice 1 : QCM _____ (5 points)

Pour chacune des 5 questions suivantes, cocher la seule réponse exacte sans justification. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Chaque réponse fautive ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.

1. On considère une fonction f , définie sur \mathbb{R} et admettant pour développement limité à l'ordre 3 en 0 :

$$f(x) = \frac{3}{2} - 5x + \frac{1}{7}x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f et T la tangente à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 0.

- Au voisinage à gauche de A , la courbe \mathcal{C}_f est située en dessous de T .
- Au voisinage de A , la courbe \mathcal{C}_f est située en dessous de T .
- Au voisinage à droite de A , la courbe \mathcal{C}_f est située en dessous de T .
- Au voisinage de A , la courbe \mathcal{C}_f est située au-dessus de T .
- On ne peut pas répondre sans information supplémentaire.

2. Le développement limité à l'ordre 3 au voisinage zéro de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-2}$ est donné par $f(x) = \dots$

- $-\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$
- $\frac{1}{2} - x - x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$
- $-\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$
- $-2x + 2x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$
- $-1 + (1-x) - (1-x)^2 + (1-x)^3 + (1-x)^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

3. Parmi les ensembles suivants lequel est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?

- $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \lfloor f(x) \rfloor = 0\}$ où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t
- l'ensemble des fonctions f dérivables sur \mathbb{R} vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x$
- l'ensemble des fonctions dérivables sur \mathbb{R} qui sont solutions de l'équation différentielle :
 $y' = 3y$
- l'ensemble des fonctions monotones sur \mathbb{R}
- l'ensemble des fonctions croissantes sur \mathbb{R}

4. Parmi les familles ci-dessous, laquelle est une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

- $(1 + X, X + X^2)$
- $(1 + X + X^2, 1 + X^2, X^2)$
- $(2 + X, -X^2, 2 + X + 2X^2)$
- $(1 + X, 3X - X^2, 5X, X^2 - 2)$
- $(1 + X + X^2)$

5. Parmi ces matrices, laquelle est celle d'un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ relativement à la base canonique ?

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} L(X) &= \left(\int_{-1}^1 t \, dt \right) X = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 X = 0 \\ L(X^2) &= \left(\int_{-1}^1 t^2 \, dt \right) X = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 X = \frac{2}{3} X \\ L(X^3) &= \left(\int_{-1}^1 t^3 \, dt \right) X = \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-1}^1 X = 0 \end{aligned}$$

(b) Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times E \times E$, alors :

$$\begin{aligned} L(\lambda P + Q) &= \left(\int_{-1}^1 (\lambda P + Q)(t) \, dt \right) X \\ &= \left(\int_{-1}^1 (\lambda P(t) + Q(t)) \, dt \right) X \\ &= \left(\lambda \int_{-1}^1 P(t) \, dt + \int_{-1}^1 Q(t) \, dt \right) X \\ &= \lambda \left(\int_{-1}^1 P(t) \, dt \right) X + \left(\int_{-1}^1 Q(t) \, dt \right) X \\ &= \lambda L(P) + L(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, L est bien une application linéaire.

(c) Soit $P \in E$. On remarque que :

$$P \in \text{Ker}(L) \iff L(P) = 0 \iff \int_{-1}^1 P(t) \, dt = 0.$$

Ainsi, l'ensemble F de l'énoncé correspond au noyau de L qui est un sous-espace vectoriel de E d'après le cours.

2. La matrice A de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{matrix}$$

3. (a) On échelonne la matrice A :

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - \frac{3}{4} C_3$$

On déduit de la forme échelonnée que A (et donc f) est de rang 3. Ainsi,

$$\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X]).$$

D'autre part, $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ car $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$. Par conséquent, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$. Donc f est surjective.

(b) D'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

Ainsi, $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1.

(c) On remarque que deux colonnes sont proportionnelles dans la matrice A . Ainsi :

$$f(1) = \frac{3}{4}f(X^2)$$

Par linéarité de f , on en déduit que :

$$f\left(1 - \frac{3}{4}X^2\right) = 0.$$

Autrement dit, $1 - \frac{3}{4}X^2$ est un élément du noyau de f . Or, le noyau étant de dimension

1, cela implique que la famille $\mathcal{D} = \left(1 - \frac{3}{4}X^2\right)$ est une base du noyau de f .

4. (a) On sait que les polynômes P de F satisfont :

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = 0.$$

Ainsi, pour tout $P \in F$:

$$\varphi(P) = P' + \left(\int_{-1}^1 P(t) dt\right) X = P'$$

(b) Comme φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même, pour démontrer qu'elle est injective il suffit de démontrer que son noyau est réduit au polynôme nul.

Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors $\varphi(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Autrement dit, $P' = 0$ d'après la question précédente. Donc P est un polynôme constant : il existe un réel C tel que $P = C$.

D'autre part, on sait que $P \in F$ i.e. $\int_{-1}^1 P(t) dt = 0$. Or,

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = \int_{-1}^1 C dt = C(1 - (-1)) = 2C.$$

On en déduit que $C = 0$. Autrement dit, $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

Par conséquent,

$$\text{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}.$$

Donc φ est injective.

Exercice 3**Partie A**

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On pose $a_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$ et en particulier $a_0 = \int_0^1 e^{-t} dt$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} t \in [0, 1] &\implies -1 \leq t \leq 0 \\ &\implies e^{-1} \leq e^{-t} \leq e^0 \quad \text{par croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R} \\ &\implies 0 \leq e^{-t} \leq 1. \end{aligned}$$

Sachant que $t^n \geq 0$ pour $t \in [0, 1]$, on en déduit :

$$\boxed{\forall t \in [0, 1], 0 \leq t^n e^{-t} \leq t^n}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En intégrant sur $[0, 1]$ l'encadrement de la question précédente, on obtient :

$$\int_0^1 0 dt \leq \int_0^1 t^n e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

i.e.

$$0 \leq a_n \leq \int_0^1 t^n dt$$

$$\text{où } \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}. \text{ Ainsi,}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que la suite

$$\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout t dans $[0, 1]$, on a $t^{n+1} \leq t^n$. Donc : $\forall t \in [0, 1], t^{n+1} e^{-t} \leq t^n e^{-t}$.
En intégrant cette inégalité sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 t^{n+1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^n e^{-t} dt.$$

D'où,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n.$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

$$3. (a) a_0 = \int_0^1 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^1 = -e^{-1} + 1 = \boxed{1 - e^{-1}}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que a_{n+1} peut s'écrire :

$$a_{n+1} = \int_0^1 u'(t) v(t) dt,$$

où u et v sont les fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ telles que :

$$\forall t \in [0, 1], \begin{cases} u(t) = -e^{-t} \\ v(t) = t^{n+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = e^{-t} \\ v'(t) = (n+1)t^n. \end{cases}$$

Donc en intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \boxed{a_{n+1}} &= [u(t) v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t) v'(t) dt \\ &= [(-e^{-t}) t^{n+1}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-t}) (n+1)t^n dt \\ &= -e^{-1} + 0 - \int_0^1 (-e^{-t}) (n+1)t^n dt \\ &= -e^{-1} + (n+1) \int_0^1 t^n e^{-t} dt \\ &= \boxed{-e^{-1} + (n+1) a_n}. \end{aligned}$$

(c) On en déduit que $(n+1) a_n = a_{n+1} + e^{-1}$ et donc que :

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n+1} (a_{n+1} + e^{-1})}.$$

(d) D'après la question 1(b), on sait que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = 0$. Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} + e^{-1}) = e^{-1}$. Et puisque $e^{-1} \neq 0$, on en déduit :

$$(a_{n+1} + e^{-1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-1}.$$

D'après la question précédente,

$$\boxed{a_n} = \frac{1}{n+1} (a_{n+1} + e^{-1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} e^{-1} \boxed{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n}}.$$

Notons qu'on aurait pu démontrer que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n}$ en vérifiant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{e^{-1}}{n}} = 1$.

En effet, pour tout entier n non nul, on a :

$$\frac{a_n}{\frac{e^{-1}}{n}} = \frac{n}{e^{-1}} a_n = \frac{n}{e^{-1}} \frac{1}{n+1} (a_{n+1} + e^{-1}) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{a_{n+1}}{e^{-1}} + 1 \right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \left(\frac{a_{n+1}}{e^{-1}} + 1 \right),$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = 0$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{e^{-1}}{n}} = 1$ i.e. $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n}$.

Partie B

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \int_0^1 (t^2 + xt + y)^2 e^{-t} dt$

1. (a) Soient α, β et γ trois nombres réels.

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta + \gamma)^2 &= [\alpha + (\beta + \gamma)]^2 = \alpha^2 + 2\alpha(\beta + \gamma) + (\beta + \gamma)^2 \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + \beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma.}$$

- (b) Soient x et y deux réels.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^1 (t^2 + xt + y)^2 e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 ((t^2)^2 + (xt)^2 + y^2 + 2t^2 xt + 2t^2 y + 2xt y) e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 (t^4 + x^2 t^2 + y^2 + 2xt^3 + 2yt^2 + 2xyt) e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 (t^4 e^{-t} + x^2 t^2 e^{-t} + y^2 e^{-t} + 2xt^3 e^{-t} + 2yt^2 e^{-t} + 2xyt e^{-t}) dt \end{aligned}$$

Donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^1 t^4 e^{-t} dt + x^2 \int_0^1 t^2 e^{-t} dt + y^2 \int_0^1 e^{-t} dt + 2x \int_0^1 t^3 e^{-t} dt + 2y \int_0^1 t^2 e^{-t} dt \\ &\quad + 2xy \int_0^1 t e^{-t} dt \\ &= a_4 + x^2 a_2 + y^2 a_0 + 2x a_3 + 2y a_2 + 2xy a_1 \\ &= \boxed{a_2 x^2 + a_0 y^2 + 2a_1 xy + 2a_3 x + 2a_2 y + a_4} \end{aligned}$$

2. En tant que fonction polynomiale, f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2a_2 x + 2a_1 y + 2a_3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2a_0 y + 2a_1 x + 2a_2 \end{cases}$$

Les éventuels points critiques de f sont les couples solutions du système (on utilisera le fait que $a_0 \neq 0$ et que $a_0 a_2 - a_1^2 \neq 0$) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a_2 x + 2a_1 y + 2a_3 = 0 \\ 2a_0 y + 2a_1 x + 2a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 x + a_1 y = -a_3 \\ \boxed{a_1 x + a_0 y = -a_2} \end{cases} \text{ avec } a_0 \neq 0$$

$$\begin{aligned}
& L_1 \leftarrow -a_0 L_1 - a_1 L_2 \iff \begin{cases} a_0 a_2 x - a_1^2 x = -a_0 a_3 + a_1 a_2 \\ a_1 x + a_0 y = -a_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_0 a_2 - a_1^2) x = a_1 a_2 - a_0 a_3 \\ a_0 y = -a_2 - a_1 x \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} x = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \\ a_0 y = -a_2 - a_1 \left(\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \right) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \\ a_0 y = \frac{-a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2 - a_1^2 a_2 + a_0 a_1 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} x = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \\ a_0 y = \frac{-a_0 a_2^2 + a_0 a_1 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \\ a_0 y = \frac{a_0 (a_1 a_3 - a_2^2)}{a_0 a_2 - a_1^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \\ y = \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_0 a_2 - a_1^2} \end{cases} \text{ car } a_0 \neq 0
\end{aligned}$$

On conclut que f admet un unique point critique :

$$b = \left(\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2}, \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_0 a_2 - a_1^2} \right)$$

3. Nous allons utiliser la condition suffisante du second ordre pour déterminer l'extremum de f .

• *Calcul des dérivées partielles secondes.*

La fonction f étant polynomiale, elle est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2a_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2a_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2a_0 \end{cases}$$

• *Utilisation des notations de Monge au point b :*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(b) = 2a_2, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(b) = 2a_1, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(b) = 2a_0$$

La matrice hessienne de f en b est : $H(f)_b = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_2 & 2a_1 \\ 2a_1 & 2a_0 \end{pmatrix}$.

Son déterminant est $rt - s^2 = 4(a_0 a_2 - a_1^2)$.

Or on a admis précédemment que $a_0 a_2 - a_1^2 > 0$ et que $a_2 > 0$.

Donc $rt - s^2 > 0$ avec $r > 0$.

Ainsi f admet un **minimum local** en b .

Remarque : on pourrait démontrer que ce minimum est absolu. Mais les calculs seraient longs et techniques avec la méthode proposée par l'exercice.