NOM : ______________________ **Prénom :** ______________________ **Groupe :** ____

Examen final

MT2A-MT2B-MT2D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Chaque étudiant rendra 3 copies (une copie pour l'exercice 2, une copie pour la partie A de l'exercice 3 et une copie pour la partie B de l'exercice 3) ainsi que la première feuille du sujet pour l'exercice 1.

Exercice 1 : QCM (5 points)

Pour chacune des 5 questions suivantes, cocher la seule réponse exacte sans justification. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Chaque réponse fausse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.

1. On considère une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et admettant pour développement limité à l'ordre 3 en 0 :

$$f(x) = \frac{3}{2} - 5x + \frac{1}{7}x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.

☐ Au voisinage à gauche de A, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de T.
☐ Au voisinage de A, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de T.
☐ Au voisinage à droite de A, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de T.
☐ Au voisinage de A, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de T.
☐ On ne peut pas répondre sans information supplémentaire.

2. Le développement limité à l'ordre 3 au voisinage zéro de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-2}$ est donné par $f(x) = \ldots$

☐ $-\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
☐ $\frac{1}{2} - x - x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
☐ $-\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
☐ $-2x + 2x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
☐ $-1 + (1-x) - (1-x)^2 + (1-x)^3 + (1-x)^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

3. Parmi les ensembles suivants lequel est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
   - ☐ $\left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\mid\; \forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor f(x) \rfloor = 0\right\}$ où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t
   - ☐ l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = x$
   - ☐ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation différentielle : $y' = 3\,y$
   - ☐ l'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$
   - ☐ l'ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$

4. Parmi les familles ci-dessous, laquelle est une base de $\mathbb{R}_2[X]$?
   - ☐ $\big(1+X\ ,\ X+X^2\big)$
   - ☐ $\big(1+X+X^2\ ,\ 1+X^2\ ,\ X^2\big)$
   - ☐ $\big(2+X\ ,\ -X^2\ ,\ 2+X+2X^2\big)$
   - ☐ $\big(1+X\ ,\ 3X-X^2\ ,\ 5X\ ,\ X^2-2\big)$
   - ☐ $\big(1+X+X^2\big)$

5. Parmi ces matrices, laquelle est celle d'un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ relativement à la base canonique ?
   - ☐ $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

À rédiger sur une copie à part

Exercice 2 : algèbre linéaire (7 points)

Pour tout entier naturel n, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n. On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.

1. Soit $L : E \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$ l'application définie par :

$$\forall\, P \in E, \quad L\big(P\big) = \left(\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\right) X$$

En particulier $L(1) = \left(\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t\right) X = 2X$.

   (a) Calculer $L(X)$, $L(X^2)$ et $L(X^3)$.

   (b) Montrer que L est une application linéaire.

   (c) En déduire que l'ensemble $F = \left\{ P \in E \mid \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. On considère à présent l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P' + L(P) \end{array}$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P. On note $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice A de f relativement aux bases canoniques $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

3. (a) Donner le rang de f. f est-elle surjective ?

   (b) En déduire la dimension du noyau de f.

   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

4. On considère la restriction φ de f à F.

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & F & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P' + \left(\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\right) X \end{array}$$

   (a) Simplifier l'expression de $\varphi(P)$ pour tout polynôme $P \in F$.

   (b) Prouver que φ est injective.

Exercice 3 : analyse (9 points)

Partie A (5 points) : à rédiger sur une copie à part

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.
On pose $a_n = \int_0^1 t^n \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ et en particulier $a_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant t^n \, \mathrm{e}^{-t} \leqslant t^n$.
   (b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. (a) Calculer a_0.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que
   $$a_{n+1} = -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)\, a_n$$
   (c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n et de a_{n+1} .
   (d) Proposer un équivalent simple de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B (4 points) : à rédiger sur une copie à part

Dans cette partie, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \int_0^1 (t^2 + x\,t + y)^2 \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

1. (a) Pour tous réels α, β et γ, développer le carré : $(\alpha + \beta + \gamma)^2$.
   (b) Prouver que, pour tous réels x et y,
   $$f(x,y) = a_2\, x^2 + a_0\, y^2 + 2a_1\, x\, y + 2a_3\, x + 2a_2\, y + a_4$$
   On ne remplacera pas $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ et a_4 par leurs valeurs.
2. *On admet, pour les deux dernières questions, que* $a_0\, a_2 - a_1^2 > 0$ et que $a_2 > 0$.

   Démontrer que f admet un unique point critique b sur $\mathbb{R}^2$.
   On exprimera ce point critique en fonction de $a_0,\ a_1,\ a_2$ et a_3.
3. Montrer que f présente un extremum local en b.
   Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.